Das Dreikörperproblem der Quantenmechanik oberhalb der Aufbruchsschwelle

Habilitationsschrift

Dem Fachbereich Physik
der Eberhard-Karl-Universität zu Tübingen

vorgelegt
von

Horst Ziegelmann
Institut für Theoretische Physik

1975

Inhaltsverzeichnis

1. Einleitung 1

2. Integralgleichungen für das quantenmechanische Dreikörperproblem 4

2.1 Notation und Kinematik 4

2.2 Die Lippmann-Schwinger Gleichung 5

2.3 Die Glöckle Gleichungen 8

2.4 Die Faddeev Gleichungen 10

2.5 Die Alt-Grassberger-Sandhas Gleichungen 10

2.6 Die Kouri-Levin Gleichungen 12

2.7 Multiplier Technik 13

2.8 Die Quasiteilchen Methode 14

3. Lösungsmethoden für Dreiteilchengleichungen 20

4. Lösung der Quasiteilchengleichungen oberhalb der Aufbruchsschwelle 28

4.1 Konvergenz der Quasibornreihe 28

4.2 Berechnung des effektiven Potentials 33

4.3 Lösungsmethoden für singuläre Integralgleichungen 40

4.3.1 Eine Subtraktionsmethode 42

4.3.2 Mellintransformation 43

4.3.3 Integration im Komplexen 43

4.3.4 Einmalige Iteration 44

4.3.5 Padétechnik 44

4.3.6 Produktintegration 45

4.3.7 Interpolationsmethode 45

4.4 Lösung der Quasiteilchengleichung mit der Interpolationsmethode 47

5. Ergebnisse für das Dreibosonensystem 55

5.1 Elastischer Kanal 55

5.2 Aufbruchskanal 59

6. Ergebnisse für das Dreinukleonensystem (elastische Streuung oberhalb der Aufbruchsschwelle) 70

6.1 Die Quasiteilchengleichungen für das Dreinukleonensystem bei zentraler Wechselwirkung 70

6.2 Ergebnisse für das Dreinukleonensystem mit Yukawawechselwirkung 74

6.3 Anwendung der Quasiteilchenmethode auf Dreiteilchensysteme mit soft-core Potential 86

6.4 Ergebnisse für das Dreinukleonensystem mit soft-core Potential 90

6.5 Zusammenfassung 99

Literatur 104

1. Einleitung

Wenn man bedenkt, daß im Rahmen des Clustermodells die α - ^{16}O Streuung [1] - ein Zwanzigkörperproblem ! - erfolgreich berechnet wurde, scheint es einem auf den ersten Blick verwunderlich, daß über das Dreikörperproblem noch so viele Worte verloren werden. Beim näheren Hinsehen bemerkt man jedoch, daß nur ein Teilaspekt des oben genannten Zwanzigkörperproblems behandelt wurde und daß z.B. Kanäle mit Dreikörperfragmentation, wie etwa

$$\alpha + {}^{16}O \rightarrow \alpha + \alpha + {}^{12}C,$$

nicht berücksichtigt werden.

Der Grund dafür liegt im komplizierten asymptotischen Verhalten der Wellenfunktion. Während man nämlich bei einer Zweikörperfragmentation einen endlichen Reaktionsraum hat (außerhalb dieses Reaktionsraumes ist die Relativfunktion der beiden Fragmente nach der Streuung eine simple Kugelwelle), liegt bei einer Dreikörperfragmentation ein praktisch unendlicher Reaktionsraum vor. Der Reaktionsraum wird einmal dadurch vergrößert, daß in der oben genannten Reaktion der Aufbruch in drei freie Teilchen nicht nur plötzlich erfolgt, sondern daß zunächst ein angeregter ^{8}Be Kern entstehen kann, der später zerfällt

$$\alpha + {}^{16}O \rightarrow {}^{8}Be + {}^{12}C \rightarrow \alpha + \alpha + {}^{12}C.$$

Außerdem ist es möglich, daß eines der beiden α-Teilchen dem ^{12}C Kern nacheilt und mit ihm einen weiteren Streuakt vollzieht. Dies hat nicht nur zur Folge, daß die funktionale Form der asymptotischen Wellenfunktion erheblich komplizierter ist als eine Kugelwelle, es ist auch die Zahl der zu bestimmenden Parameter weit größer als bei der Zweierfragmentation. Während man dort nur eine Zahl (nämlich die Streuamplitude) bestimmen muß, hat man bei der Dreierfragmentation eine komplette Verteilungsfunktion zu bestimmen, da ja die Energieaufteilung zwischen den Fragmenten völlig frei ist. Man sieht aus diesem Beispiel, daß der Anwendungsbereich von Mehrteilchenreaktionstheorien erweiterungsbedürftig ist und daß die völlige Beherrschung des Dreiteilchenproblems allen Mehrteilchentheorien zugute käme.

Ein weiterer Grund für das Interesse am Dreiteilchenproblem ist das Dreinukleonensystem. Man hofft aus den Dreinukleonenobservablen Details der Nukleon-Nukleon Wechselwirkung extrahieren zu können, die entweder gar nicht (wie z.B. das off-shell Verhalten [2] und die Neutron-Neutron Wechselwirkung) oder nur schwer (wie z.B. der Mischungsparameter zwischen ^{3}S- und ^{3}D-Welle) aus Zweinukleonenobservablen bestimmt werden können.

Die Liste interessanter Dreikörperprozesse ist ziemlich lang. Wir wollen hier nur noch ein Beispiel anführen, das man aus gewissen Gründen getrost als das wichtigste unter allen ansehen kann. Dies ist die Proton-Proton Kette, über die die Energieerzeugung auf der Sonne erfolgt:

Nachdem in der Reaktion

$$p + p \rightarrow d + e^+ + \nu$$

durch den ß-Zerfall des Diprotons ein Deuteron erzeugt wurde, führt die Dreinukleonenreaktion

$$p + d \rightarrow {}^3He + \gamma$$

zur Entstehung von ^{3}He Kernen. Die Reaktion dieser Kerne

$${}^3He + {}^3He \rightarrow {}^4He + 2p$$

liefert durch die Dreierfragmentation ein α-Teilchen samt der bei der Verschmelzung frei werdenden Energie. Der aufgrund unserer bisherigen Kenntnisse berechnete Neutrinofluß ist um eine Größenordnung größer als der tatsächlich gemessene [3]. Ein besseres Verständnis des Dreikörperproblems könnte dazu beitragen, diese Diskrepanz zu beseitigen oder zu bestätigen. Letzteres würde heißen, daß die Sonne zur Zeit eine Pause in der Energieproduktion eingelegt hat, von der wir anderweitig nichts merken, da Lichtstrahlung aus dem Kern der Sonne erst nach zehn Millionen Jahren die Oberfläche erreicht.

In den Bemühungen zur Lösung des quantenmechanischen Dreikörperproblems kann man zwei Phasen unterscheiden. Die erste Phase erreichte ihren Höhepunkt in den Arbeiten Faddeevs [4], der 1960 die nach ihm benannten Gleichungen aufstellte, deren Lösungen

automatisch die oben geschilderten Randbedingungen erfüllen. Während in der Folgezeit noch viele Alternativen zur Faddeevtheorie erarbeitet wurden, begann die zweite Phase, die der praktischen Lösung der Faddeev Gleichungen gewidmet war. Erfolge wurden hier hauptsächlich mit separablen Potentialen erzielt [5-7], während Rechnungen mit lokalen Potentialen selten sind [8]. Will man, wie oben erwähnt, durch die Analyse von Dreinuklernendaten Information über die Nukleon-Nukleon Wechselwirkung erhalten, so ist es natürlich unschön, wenn man sich von vornherein auf einen bestimmten Potentialtyp festlegt. Es ist das Ziel der vorliegenden Arbeit, an Hand einiger praktischer Rechnungen zu demonstrieren, wie das quantenmechanische Dreikörperproblem im Fall nichtseparabler Wechselwirkung gelöst werden kann.

2. Integralgleichungen für das quantenmechanische Dreikörperproblem

2.1 Notation und Kinematik

Der Hamiltonoperator für drei über Zweiteilchenpotentiale wechselwirkende Teilchen mit Masse m_1 , m_2 , m_3 hat die Form

$$H' = \frac{k_1^2}{2m_1} + \frac{k_2^2}{2m_2} + \frac{k_3^2}{2m_3} + V_1 + V_2 + V_3 \quad . \tag{2.1}$$

Dabei beschreibt v_i die Wechselwirkung zwischen Teilchen j und k (i≠j≠k≠i).

Die Abseparierung der nicht interessierenden Schwerpunktsbewegung gelingt mit den Koordinaten

$$\vec{p}_1 = \frac{m_3 \vec{k}_2 - m_2 \vec{k}_3}{m_2 + m_3}$$

$$\vec{q}_1 = \vec{k}_1 - \frac{m_1}{m_1 + m_2 + m_3} \vec{k} \tag{2.2}$$

$$\vec{k} = \vec{k}_1 + \vec{k}_2 + \vec{k}_3 \quad .$$

Durch geeignete Vertauschung der Indizes erhält man die Koordinaten, in denen Teilchen 2 oder 3 ausgezeichnet sind. In diesen Koordinaten schreibt sich der Hamiltonoperator

$$H' = \frac{k^2}{2(m_1 + m_2 + m_3)} + \frac{p_1^2}{2\mu_1} + \frac{q_1^2}{2M_1} + V_1 + V_2 + V_3 \quad , \tag{2.3}$$

mit den reduzierten Massen

$$\mu_1 = \frac{m_2 m_3}{m_2 + m_3} \qquad M_1 = \frac{m_1 (m_2 + m_3)}{m_1 + m_2 + m_3} \tag{2.4}$$

Wegen der Translationsinvarianz des Problems können wir die Bewegung des Schwerpunkts weglassen und erhalten

$$H = \frac{p_\alpha^2}{2\mu_\alpha} + \frac{q_\alpha^2}{2M_\alpha} + \sum_{\gamma=1}^{3} V_\gamma \quad , \quad \alpha = 1, 2, 3 \quad . \tag{2.5}$$

Anfangszustände in einem Dreiteilchenstreuproblem sind Eigenzustände zu den Kanalhamiltonoperatoren

$$h_\alpha |\phi_{\alpha m}\rangle \equiv \left(\frac{p_\alpha^2}{2\mu_\alpha} + \frac{q_\alpha^2}{2M_\alpha} + V_\alpha \right) |\phi_{\alpha m}\rangle = E_{\alpha m} |\phi_{\alpha m}\rangle \quad . \tag{2.6}$$

Diese sogenannten Kanalfunktionen $|\phi_{\alpha m}\rangle$ beschreiben die freie Bewegung von Teilchen α relativ zu den beiden anderen, deren Bindungszustand durch den Index m gekennzeichnet ist. Mit den Kanalhamiltonoperatoren schreibt sich der Gesamthamiltonoperator

$$H = h_\alpha + \bar{V}_\alpha \equiv h_\alpha + \sum_{\gamma \neq \alpha} V_\alpha \quad , \alpha = 0,1,2,3 . \tag{2.7}$$

Dabei haben wir mit der Definition

$$V_0 \equiv 0 \tag{2.8}$$

zusätzlich noch den Hamiltonoperator

$$h_0 = \frac{p_\beta^2}{2\mu_\beta} + \frac{q_\beta^2}{2M_\beta} \quad , \beta = 1,2,3 \tag{2.9}$$

für den Aufbruchskanal eingeführt. Die zugehörige Kanalfunktion ist:

$$|\phi_0\rangle = |\vec{p}_\beta\rangle |\vec{q}_\beta\rangle \quad , \beta = 1,2,3 \quad . \tag{2.10}$$

2.2 Die Lippmann-Schwinger Gleichung

Aus der zeitabhängigen Streutheorie [9] folgt, daß die zeitunabhängige Lösung der Schrödinger Gleichung bei gegebenem Anfangszustand $|\phi_{\alpha m}\rangle$ gegeben ist durch

$$|\psi_{\alpha m}^{(+)}\rangle = \lim_{\epsilon \to 0} i\epsilon G(E+i\epsilon) |\phi_{\alpha m}\rangle \quad . \tag{2.11}$$

Dabei ist G(z) die volle Resolvente des Dreiteilchensystems

$$G(z) = (z - H)^{-1} \tag{2.12}$$

Mit den Kanalresolventen

$$g_\alpha(z) = (z - h_\alpha)^{-1}, \quad \alpha = 0,1,2,3 , \tag{2.13}$$

gelten die Resolventengleichungen

$$G(z) = g_\alpha(z) + g_\alpha(z)\bar{V}_\alpha G(z) \tag{2.14a}$$

$$= g_\alpha(z) + G(z)\bar{V}_\alpha g_\alpha(z) \tag{2.14b}$$

Setzt man Gl. (2.14a) in Gl. (2.11) ein, so erhält man eine Integralgleichung für den Streuzustand

$$|\psi^{(+)}_{\alpha m}\rangle = |\phi_{\alpha m}\rangle + g_\alpha(E+i0)\bar{V}_\alpha |\psi^{(+)}_{\alpha m}\rangle , \tag{2.15}$$

die Lippmann-Schwinger Gleichung.

Die entsprechende Gleichung im Zweiteilchenproblem ist eindeutig lösbar. Die Randbedingungen sind im Gegensatz zur Schrödinger Gleichung automatisch enthalten. Die zugehörige homogene Gleichung wird nur durch die Bindungszustandsfunktion gelöst. Insofern ist die Zweiteilchen - Lippmann-Schwinger Gleichung ein Fortschritt gegenüber der Zweiteilchen - Schrödinger Gleichung. Dieser Fortschritt ist aber nur minimal, da die Beachtung der Randbedingungen im Zweiteilchenfall nicht schwierig ist. Im Dreiteilchenfall jedoch wäre eine entsprechende Gleichung ein großer Gewinn, da die Randbedingungen im Aufbruchsfall kompliziert sind.

Die nähere Untersuchung der Dreiteilchen - Lippmann-Schwinger Gleichung zeigt nun, daß sie das Gewünschte nicht leisten kann. Sie stellt sogar einen Rückschritt gegenüber der Schrödinger Gleichung dar, denn bereits die Berechnung von Bindungszuständen wird zum Problem.

Um Gl. (2.15) (bzw. deren homogene Version bei Bindungszuständen) praktisch lösen zu können, müßte man sie in eine Matrixgleichung verwandeln. Voraussetzung dafür ist, daß der Kern der Gleichung

$$K_\alpha(z) \equiv g_\alpha(z)\,\bar{V}_\alpha \quad , \alpha = 0,1,2,3 \, , \tag{2.16}$$

ein diskretes Spektrum hat:

$$K_\alpha(z)|\psi_\nu(z)\rangle = \eta_\nu(z)|\psi_\nu(z)\rangle \quad , \nu = 1,2,3\ldots \tag{2.17}$$

Weinberg [10] hat jedoch gezeigt, daß das Spektrum auch kontinuierliche Anteile hat, und somit ist eine Matrixapproximation unmöglich.

Glücklicherweise sind die kontinuierlichen Eigenwerte im Bereich der Bindungsenergien dem Betrage nach kleiner als 1, so daß man iterativ den größten diskreten Eigenwert berechnen kann, der mit

$$\eta_1(E^B) = 1 \tag{2.18}$$

die Bindungsenergie liefert [11].

Wenden wir uns nun der nächst schwierigen Aufgabe zu, der elastischen Streuung unterhalb der Aufbruchsschwelle, so entdecken wir ein weiteres Problem. Sobald Rearrangementstreuung möglich ist, hat die zu Gl. (2.15) gehörende homogene Gleichung Lösungen [4,12], und zwar

$$|\psi^{(+)}_{\beta u}\rangle = \lim_{\epsilon \to 0} i\epsilon\, G(E+i\epsilon)|\phi_{\beta u}\rangle \quad , \beta \neq \alpha \, . \tag{2.19}$$

Anwendung von Gl. (2.14a) mit Index $\alpha \neq \beta$ liefert nämlich

$$|\psi^{(+)}_{\beta u}\rangle = g_\alpha(E+i0)\,\bar{V}_\alpha\,|\psi^{(+)}_{\beta u}\rangle \, . \tag{2.20}$$

Damit ist die Lippmann-Schwinger Gleichung (2.15) nicht eindeutig lösbar. Gleichung (2.20) ist eine Folge des sich nun bis über den Punkt $\eta = 1$ hinaus erstreckenden kontinuierlichen

Spektrums. Da das Spektrum in der Umgebung von 1 kontinuierlich ist, findet sich jetzt für jede Energie ein Eigenwert 1 und somit auch eine Lösung der homogenen Lippmann-Schwinger Gleichung.

Obwohl sich für identische Teilchen am Spektrum nichts ändert und die homogene Lippmann-Schwinger Gleichung ebenfalls Lösungen hat, treten trotzdem keine Eindeutigkeitsprobleme auf, da man ja fordern muß, daß die Lösung von (2.15) symmetrisch in den Teilchenkoordinaten ist. Die Lösungen der homogenen Gleichung sind dagegen nicht symmetrisch. Anschaulich ist es klar, daß man für identische Teilchen mit einer Gleichung auskommt: Es handelt sich hier nur um ein Einkanalproblem.

2.3 Die Glöckle Gleichungen

Auch im allgemeinen Fall nicht identischer Teilchen kann man durch Zusatzforderungen an die Lippmann-Schwinger Gleichung zu eindeutigen Lösungen kommen. Fordert man neben

$$|\psi_{1m}^{(+)}\rangle = |\phi_{1m}\rangle + g_1(E+i0)\bar{V}_1|\psi_{1m}^{(+)}\rangle \qquad (2.21a)$$

noch

$$|\psi_{1m}^{(+)}\rangle = g_2(E+i0)\bar{V}_2|\psi_{1m}^{(+)}\rangle \qquad (2.21b)$$

und

$$|\psi_{1m}^{(+)}\rangle = g_3(E+i0)\bar{V}_3|\psi_{1m}^{(+)}\rangle \qquad (2.21c)$$

so ist, wie von Glöckle [13] gezeigt wurde, die Lösung auch im Aufbruchsfall eindeutig bestimmt. Die Forderungen (2.21b,c) bedeuten, daß in den Kanälen 2 und 3 nur auslaufende Kugelwellen zugelassen werden, so daß Lösungen wie (2.19) ausgeschlossen sind, da diese auch eine durchlaufende ebene Welle $|\phi_{2u}\rangle$ beinhaltet. Bei Glöckle [13] sind auch Methoden angegeben, die es erlauben, die nichtkompakten Kerne in Gl. (2.21) kompakt zu machen.

Die einfachste Methode, zu einem kompakten Kern zu kommen, ist, Gl. (2.21c) in Gl. (2.21b) und das Ergebnis in Gl. (2.21a) einzusetzen. Das ergibt

$$|\psi_{1m}^{(+)}\rangle = |\phi_{1m}\rangle + g_1\bar{V}_1\, g_2\bar{V}_2\, g_3\bar{V}_3\, |\psi_{1m}^{(+)}\rangle \qquad (2.22)$$

Betrachtet man die graphische Darstellung von typischen Beiträgen zum Kern von Gl. (2.22) und zum Kern von Gl. (2.15) in Abb. 1, so sieht man einen wesentlichen Unterschied. Während es in der Lippmann-Schwinger Gleichung immer ein Teilchen gibt, das an der Wechselwirkung nicht teilnimmt, sind im Kern von Gl. (2.22) alle Teilchen durch die Wechselwirkung verbunden.

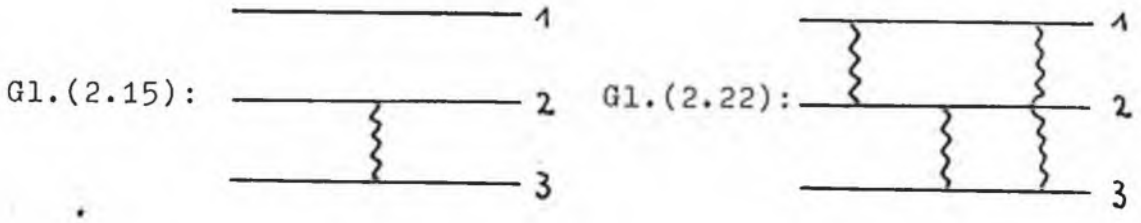


Abb. 1 Typische Beiträge zum Kern von Gl. (2.15) bzw. (2.22). Die waagerechten Linien stellen die einzelnen Teilchen dar, die Wellenlinien die Wechselwirkung.

Diese "Verbundenheit" aller Teilchen führt bei genügend rasch abfallendem Potential zu einem kompakten Kern für $\mathrm{Im}(z) \neq 0$. Im Bereich der Streuenergien ist der Kompaktheitsbeweis schwierig, da er in einem Banachraum durchgeführt werden muß. Im Gegensatz zu Gl. (2.22) hat die Lippmann-Schwinger Gleichung einen nichtverbundenen Kern. Die Darstellung des Kerns enthält wegen des nichtwechselwirkenden Teilchens eine δ-Funktion, deren Singularität die Schmidtnorm divergieren läßt und auch die Kompaktheit ausschließt.

Die Glöckle Gleichungen waren nicht die ersten Integralgleichungen, die das Dreiteilchenproblem exakt beschreiben. Wir haben sie dennoch an die Spitze unserer Betrachtungen gestellt, da sie wohl am einleuchtendsten von allen Gleichungen sind. Durch einfache Umformungen gelangt man zu allen anderen bekannten Integralgleichungen.

2.4 Die Faddeev Gleichungen

Multipliziert man in Gl. (2.21) die i-te Gleichung von links mit $g_o v_i$, so erhält man mit der Definition

$$|\psi_{\alpha m}^{(+)}\rangle_i = g_o(E+i0)v_i|\psi_{\alpha m}^{(+)}\rangle \tag{2.23}$$

und der Beziehung

$$g_i(z)V_i = g_o(z)t_i(z) \tag{2.24}$$

bei Verallgemeinerung auf beliebige Anfangszustände die Gleichung

$$|\psi_{\alpha m}^{(+)}\rangle_i = \delta_{i\alpha}|\phi_{\alpha m}\rangle + g_o t_i\left(|\psi_{\alpha m}^{(+)}\rangle_j + |\psi_{\alpha m}^{(+)}\rangle_k\right), \quad (ijk)=(123) \tag{2.25}$$

Dabei gilt

$$\sum_{i=1}^{3}|\psi_{\alpha m}^{(+)}\rangle_i = |\psi_{\alpha m}^{(+)}\rangle \tag{2.26}$$

Faddeev [4,16] war zu diesen Gleichungen gelangt, indem er ausnutzte, daß eine Aufspaltung der Art (2.26) in der Lippmann-Schwinger Gleichung eine Teillösung erlaubt. Diese Teillösung entfernt einen Teil des nichtzusammenhängenden Kerns von (2.15) und bewirkt, daß der Kern der iterierten Gleichung zusammenhängend ist. Diese Eigenschaft erlaubt bereits die Anwendung von Standardlösungsverfahren. Im Vergleich zu Gl. (2.22) sind die Faddeev Gleichungen wesentlich computerfreundlicher, da nur ein Operatorprodukt auszuwerten ist.

2.5 Die Alt-Grassberger-Sandhas Gleichungen

Multipliziert man in Gl. (2.21) die i-te Gleichung von links mit v_i und addiert die dabei entstehenden Gleichungen paarweise, so erhält man ($\bar{\delta}_{\beta\alpha} = 1 - \delta_{\beta\alpha}$)

$$\bar{V}_\beta|\psi_{\alpha m}^{(+)}\rangle = \bar{\delta}_{\beta 1}V_1|\phi_{\alpha m}\rangle + \sum_{\gamma\neq\beta} t_\gamma g_o \bar{V}_\gamma|\psi_{\alpha m}^{(+)}\rangle \tag{2.27}$$

Mit

$$V_1 |\phi_{1m}\rangle = g_0^{-1}(E) |\phi_{1m}\rangle \tag{2.28}$$

und der Definition

$$\bar{V}_\beta |\psi_{1m}^{(+)}\rangle = U_{\beta 1}(E+i0) |\phi_{1m}\rangle \tag{2.29}$$

erhält man unter Weglassen von $|\phi_{1m}\rangle$ und Verallgemeinerung auf beliebige Anfangszustände und beliebige komplexe Energien

$$U_{\beta\alpha}(z) = \bar{\delta}_{\beta\alpha} g_0^{-1}(z) + \sum_{\gamma\neq\beta} t_\gamma(z) g_0(z) U_{\gamma\alpha}(z) \tag{2.30}$$

ein Gleichungssystem für die Übergangsoperatoren, deren Matrixelemente zwischen Kanalzuständen direkt mit den Rearrangement Wirkungsquerschnitten verknüpft sind. Hätte man bei der Herleitung alle Gleichungen aufaddiert, so wäre man zu folgender Gleichung gelangt

$$U_{0\alpha}(z) = g_0^{-1}(z) + \sum_{\gamma=1}^{3} t_\gamma(z) g_0(z) U_{\gamma\alpha}(z) \tag{2.31}$$

Der Übergangsoperator $U_{0\alpha}$ liefert direkt den Aufbruchsquerschnitt. Nach Gl. (2.31) kann man ihn ohne Lösen einer Integralgleichung aus den Rearrangementoperatoren berechnen. Zu einer Integralgleichung für den Übergangsoperator gelangt man, wenn man in Gl. (2.30) $\alpha = 0$ wählt

$$U_{\beta 0}(z) = g_0^{-1}(z) + \sum_{\gamma\neq\beta} t_\gamma(z) g_0(z) U_{\gamma 0}(z) \tag{2.32}$$

Diese Gleichung, ebenfalls von Alt, Grassberger und Sandhas [14] abgeleitet, ist nicht in unserer Herleitung enthalten.

2.6 Die Kouri-Levin Gleichungen

Multipliziert man in Gl. (2.21) die i-te Gleichung mit $\bar{V}_j$ ((i,j) = (1,3),(2,1),(3,2)), so erhält man mit der Definition (2.29) durch Weglassen von $|\phi_{1m}\rangle$ und Verallgemeinerung auf beliebige Anfangszustände und beliebige komplexe Energien

$$\tilde{U}_{\beta\alpha}(z) = \bar{V}_\beta \delta_{\gamma\alpha} + \bar{V}_\beta g_\gamma(z) \tilde{U}_{\gamma\alpha}(z), \quad (\beta,\gamma) = (3,1),(1,2),(2,3). \tag{2.33}$$

Die Operatoren $\tilde{U}_{\beta\alpha}$ sind definiert als

$$\tilde{U}_{\beta\alpha}(z) = \bar{V}_\beta + \bar{V}_\beta G(z) \bar{V}_\alpha \tag{2.34}$$

und stimmen on-shell mit den Operatoren von Gl. (2.30) überein.

Kouri und Levin leiteten das System (2.33) ab, indem sie die Resolventengleichungen (2.14a) zu

$$G(z) = \sum_{\gamma=1}^{3} W_{\ell\gamma} \left(g_\gamma(z) + g_\gamma(z) \bar{V}_\gamma G(z) \right) \tag{2.35}$$

überlagerten und in (2.34) einsetzten. Dieses Vorgehen führt auf

$$\tilde{U}_{\beta\alpha}(z) = \bar{V}_\beta W_{\beta\alpha} + \bar{V}_\beta \sum_{\gamma=1}^{3} W_{\beta\gamma} g_\gamma(z) \tilde{U}_{\gamma\alpha}(z) \tag{2.36}$$

Die W's werden dann so bestimmt, daß das iterierte Gleichungssystem einen zusammenhängenden Kern besitzt. Dem Gleichungssystem (2.33) liegt die Wahl

$$(W_{\beta\gamma}) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \tag{2.37}$$

zugrunde, die nach zweimaliger Iteration zu einem zusammenhängenden Kern führt [15].

Für das Dreikörperproblem scheint es keine Integralgleichungen mit zusammenhängendem Kern zu geben, die nicht auch eindeutig lösbar sind. Bei den hier angeführten Integralgleichungen ist die Eindeutigkeit gesichert, da der Zusammenhang mit den Faddeev Gleichungen hergestellt werden kann [16]. Auf der Jagd nach dem zusammenhängenden Kern wird oft außer acht gelassen, daß nicht die Kompaktheit, sondern die Eindeutigkeit die entscheidende Eigenschaft ist. Z.B. sind die Glöckle Gleichungen (2.21) eindeutig, obwohl der Kern nicht zusammenhängend ist. Bereits im Vierkörperproblem gibt es Gleichungen, deren Kern nach einigen Iterationen zusammenhängend ist, die aber nicht eindeutig sind [17].

2.7 Multiplier Technik

Läßt man das Eindeutigkeitsproblem außer acht, so kann man auch folgendermaßen zu einer Lösung der Lippmann-Schwinger Gleichung kommen. Für die Lösung kann man schreiben

$$|\psi^{(+)}_{\alpha m}\rangle = L\left[M\,(1 - g_\alpha \bar{V}_\alpha)\,L\right]^{-1} M\,|\phi_{\alpha m}\rangle \qquad (2.38)$$

mit zunächst freien "Multipliern" M und L [18]. Diese Multiplier werden dann so gewählt, daß das Inverse von $M(1-g_\alpha \bar{V}_\alpha)L$ mit Standardmethoden berechenbar wird. Die Multiplier werden aber derart kompliziert, daß ein solches Vorgehen kaum praktikabel ist, da die Auswertung der Operatorprodukte auf hochdimensionale Integrale führt. Auch für grundlegende Überlegungen, wie z.B. die Herleitung einer Unitaritätsrelation, ist ein solches Vorgehen nur hinderlich; denn wie will man die analytische Struktur einer Größe [19] bestimmen, die ein Produkt aus 18 Operatoren ist, die selbst Schnitte haben !

Würde man die oben angeführten Gleichungen entkoppeln, so würde man auf ähnliche Ausdrücke stoßen. Es ist gerade der Witz bei der Aufstellung von Integralgleichungen, daß man gekoppelte Gleichungen hinschreibt, da man dann nicht darauf angewiesen ist,

direkt einen kompakten Kern zu produzieren, sondern nur die bedeutend schwächere Forderung erfüllen muß, daß eine Potenz des Kerns kompakt wird.

2.8 Die Quasiteilchen Methode

Alle oben angeführten Gleichungen haben einen Nachteil gemeinsam - ihre Partialwellenzerlegung führt im allgemeinen auf ein unendliches System von gekoppelten zweidimensionalen Integralgleichungen. Vernachlässigt man die Subsystemwechselwirkungen in höheren Drehimpulszuständen, so wird das System endlich. Trotzdem ist die Lösung solcher zweidimensionaler gekoppelter Integralgleichungssysteme für heutige Rechenanlagen ein Problem. Nur die Annahme eines separablen Potentials

$$V = \sum_{r=1}^{N} \lambda_r |\chi_r\rangle\langle\chi_r| \qquad (2.39)$$

reduziert wegen seiner Projektionseigenschaften die Dreiteilchengleichungen auf ein System von 3N eindimensionalen Integralgleichungen. Man weiß zwar, daß ein realistisches Nukleon-Nukleon Potential nicht separabel ist, doch kann man durch genügend viele Terme in Gl. (2.39) die Wechselwirkung sehr genau wiedergeben. Ökonomisch ist ein solches Verfahren nicht, da man bei vielen gekoppelten Gleichungen bald an die Grenzen der Rechenanlage kommt.

Aus diesem Grund ist ein anderes Vorgehen von Interesse: Spaltet man das gegebene (nicht separable) Potential auf in eine Reihe separabler Terme und einen Rest

$$V = V^S + V' \equiv \sum_{r=1}^{N} \lambda_r |\chi_r\rangle\langle\chi_r| + V' \qquad (2.40)$$

so findet man immer eine Aufspaltung, die zu einem Rest führt, der störungstheoretisch behandelbar ist. Die separablen Terme werden durch die eben besprochenen eindimensionalen Integralgleichungen berücksichtigt. Die Zahl der gekoppelten Integralgleichungen wird jetzt bedeutend geringer sein, da man nicht für

jedes Detail des Potentials separable Terme einführen muß. Wendet man dieses von Weinberg [20] so genannte Quasiteilchenkonzept auf die Gleichung (2.30) für die Übergangsoperatoren an, so erhält man die Alt-Grassberger-Sandhas Gleichungen in neuer Form [14]:

$$X_{\beta u,\alpha m}(z) = X'_{\beta u,\alpha m}(z) + \sum_{\gamma=1}^{3} \sum_{\substack{k=1 \\ k'=1}}^{N} X'_{\beta u,\gamma k}(z)\, \Delta_{\gamma k k'}(z)\, X_{\gamma k',\alpha m}(z) \qquad (2.41)$$

Dabei ist

$$X_{\beta u,\alpha m}(z) = \langle \tilde{\chi}_{\beta u}(z^*) | U_{\beta\alpha}(z) | \tilde{\chi}_{\alpha m}(z) \rangle \qquad (2.42a)$$

$$X'_{\beta u,\alpha m}(z) = \langle \tilde{\chi}_{\beta u}(z^*) | U'_{\beta\alpha}(z) | \tilde{\chi}_{\alpha m}(z) \rangle \qquad (2.42b)$$

$$\Delta^{-1}_{\gamma k k'}(z) = \delta_{kk'} \lambda^{-1}_{\gamma k} - \langle \chi_{\gamma k} | g_0(z) | \tilde{\chi}_{\gamma k'}(z) \rangle \qquad (2.42c)$$

$$| \tilde{\chi}_{\gamma k}(z) \rangle = \left(1 + t'_\gamma(z) g_0(z)\right) | \chi_{\gamma k} \rangle \qquad (2.42d)$$

$$t'_\gamma(z) = \left(1 - v'_\gamma g_0(z)\right)^{-1} v'_\gamma \qquad (2.42e)$$

Gleichung (2.41) liefert nach Partialwellenzerlegung ein System von eindimensionalen Integralgleichungen, deren Lösung uns gerade diejenigen Matrixelemente der $U_{\beta\alpha}$ verschafft, die zur Berechnung der S-Matrix nötig sind.

Man hat damit von der Struktur her eine genauso einfache Gleichung wie im separablen Modell, nur sind "Potential" X' und "Propagator" Δ kompliziertere Größen, da sie auch den Einfluß der nichtseparablen Anteile enthalten. Der zur Berechnung des

"Potentials" X' benötigte Operator $U'_{\beta\alpha}$ gehorcht der Gleichung

$$U'_{\beta\alpha}(z) = \bar{\delta}_{\beta\alpha} g_0^{-1}(z) + \sum_{\gamma=1}^{3} \bar{\delta}_{\beta\gamma} t'_{\gamma}(z) g_0(z) U'_{\gamma\alpha}(z) \qquad (2.43)$$

Diese Gleichung wäre natürlich genauso schwierig zu lösen wie die ursprüngliche Gleichung (2.30), wenn man durch die Aufspaltung (2.40) nicht garantieren könnte, daß $U'_{\beta\alpha}$ über seine Neumannreihe berechenbar ist:

$$U'_{\beta\alpha}(z) = \bar{\delta}_{\beta\alpha} g_0^{-1}(z) + \sum_{\gamma \neq \alpha,\beta} t'_{\gamma}(z) + \ldots \qquad (2.44)$$

Dies ist jedoch mit einer endlichen Zahl von separablen Termen immer möglich, da die Norm von t'_{γ} durch den größten Eigenwert von $g_0 v'_{\gamma}$ gegeben ist. Da $g_0 v'_{\gamma}$ ein kompakter Operator ist, dessen Eigenwerte sich nur bei Null häufen können, genügt eine endliche Zahl von separablen Termen, um konvergenzstörende Eigenwerte zu entfernen.

Das Quasiteilchenkonzept kann man auch direkt auf die Resolventengleichung (2.14) anwenden; man gelangt dann zu ähnlichen Gleichungen wie (2.41), nur stehen die so gewonnenen Gleichungen auf eigenen Füßen [21]. Bei der Herleitung werden wir uns kurz fassen, da wir erst neulich eine ausführliche Darstellung gegeben haben [22].

Ausgehend von der Resolventengleichung (2.14), gelangt man mit einer Aufspaltung des gegebenen Potentials, wie in Gl. (2.40), zu

$$G(z) = g_0(z) + g_0(z) V^S G(z) + g_0(z) V' G(z) \qquad (2.45)$$

Den Einfluß des Restpotentials stecken wir in eine Restresolvente

$$G'(z) = \left(1 - g'_{\beta}(z) \bar{V}'_{\beta}\right)^{-1} g'_{\beta}(z) \qquad (2.46)$$

und erhalten damit aus Gl. (2.45)

$$G(z)=G'(z)+\sum_{\gamma=1}^{3}\sum_{k=1}^{N} G'(z)|\chi_{\gamma k}\rangle\lambda_{\gamma k}\langle\chi_{\gamma k}|G(z) \quad (2.47)$$

Damit ist die weitere Rechnung ebenso einfach wie für rein separables Potential. Wir nehmen nun Matrixelemente von G(z) zwischen den Formfaktoren und erhalten[+)]

$$\langle\chi_{\beta u}|G(z)|\chi_{\alpha m}\rangle = \langle\chi_{\beta u}|G'(z)|\chi_{\alpha m}\rangle + \sum_{\gamma=1}^{3}\sum_{k=1}^{N}\langle\chi_{\beta u}|G'(z)|\chi_{\gamma k}\rangle\lambda_{\gamma k}\langle\chi_{\gamma k}|G(z)|\chi_{\alpha m}\rangle \quad (2.48)$$

Dies ist bereits eine Gleichung, die durch Partialwellenzerlegung zu einer eindimensionalen Integralgleichung wird. Der Kern dieser Gleichung ist allerdings für $\gamma = \beta$ nicht kompakt, da $\langle\chi_{\beta u}|G'(z)|\chi_{\beta k}\rangle$ nach Gl. (2.46) auch das Matrixelement $\langle\chi_{\beta u}|g'_\beta(z)|\chi_{\beta k}\rangle$ enthält, bei dem das Teilchen β nicht wechselwirkt und somit eine δ-Funktion liefert. Führt man zur Vermeidung solcher nichtkompakten Terme eine Teillösung durch, so erhält man schließlich

$$G(z)=G_0(z)+G_0(z)V(z)G(z) \quad (2.49)$$

mit

$$\big(G(z)\big)_{\beta u,\alpha m}=\lambda_{\beta u}\langle\chi_{\beta u}|G(z)|\chi_{\alpha m}\rangle\lambda_{\alpha m}+\delta_{\beta\alpha}\delta_{um}\lambda_{\alpha m} \quad (2.50a)$$

[+)] Entscheidend ist natürlich, daß man nur diese Matrixelemente und nicht die volle Resolvente zur Berechnung der S-Matrix braucht [21]. Voraussetzung hierfür ist, daß der Überlapp von Formfaktoren und Zweiteilchenbindungszuständen durch $\langle\chi_{\alpha n}|\psi_{\alpha m}\rangle = \lambda^{-1}_{\alpha m}\delta_{mn}$ gegeben ist.

$$\left(V(z)\right)_{\beta u,\alpha m} = \langle \chi_{\beta u} | G'(z) - \delta_{\beta\alpha} q'_{\beta}(z) | \chi_{\alpha m} \rangle \qquad (2.50b)$$

$$\left(G_0(z)\right)_{\beta u,\alpha m} = \delta_{\beta\alpha} \Delta_{\alpha u m}(z) \qquad (2.50c)$$

$$\Delta^{-1}(z)_{\alpha u m} = \delta_{u m} \lambda^{-1}_{\alpha m} - \langle \chi_{\alpha m} | q'_{\alpha}(z) | \chi_{\alpha u} \rangle \qquad (2.50d)$$

Die so gewonnene Gleichung hat die Form der Zweiteilchen-Resolventengleichung. In der Tat handelt es sich auch um eine Zweiteilchengleichung, da durch die Bildung von Matrixelementen über die Koordinaten des Subsystems bereits integriert ist. Nutzt man die Analogie zum Zweiteilchenfall aus, so kann man sofort eine Gleichung für den entsprechenden T-Operator angeben, der direkt die Wirkungsquerschnitte für Zweierfragmentation liefert.

Mit der Definition

$$T(z) = V(z) + V(z) G(z) V(z) \qquad (2.51)$$

erhält man

$$T(z) = V(z) + V(z) G_0(z) T(z) \qquad (2.52)$$

Die Frage ist nun, ob man auch den Aufbruch in drei freie Teilchen so berechnen kann. Elastische und Rearrangement - Dreiteilchenstreuung ist schließlich leicht als Streuung zweier Körper (wovon einer zusammengesetzt ist) zu verstehen, und es ist nachträglich nicht verwunderlich, wenn man dafür effektive Zweiteilchengleichungen erhält. Der Aufbruch in drei freie Teilchen ist aber ein echter Dreiteilchenprozeß. Interessanterweise ist auch zur Beschreibung dieses Prozesses genügend Information in dem

Matrixelement $\langle \vec{q}_\beta | T_{\beta n,\alpha m}(E+i0) | \vec{q}'_\alpha \rangle$ enthalten; denn es beschreibt off-shell

$$q_\beta^2/2M_\beta \leq E = q'^2_\alpha/2M_\alpha + E^B_{\alpha m} \qquad (2.53)$$

die Erzeugung eines Zweiteilchenzustandes mit positiver Energie

$$p_\beta^2/2\mu_\beta = E - q_\beta^2/2M_\beta \geq 0 \qquad (2.54)$$

der zerfallen kann. Da nicht die Erzeugungswahrscheinlichkeit bestimmter Subsystemzustände interessiert, sondern das Auftreten von drei freien Teilchen (dem ja noch "Rescattering" vorausgehen kann), ist der Aufbruchoperator nicht direkt durch die Größe T gegeben, sondern durch

$$T(z) = U(z) + U(z) G_0(z) T(z) \qquad (2.55)$$

mit

$$\left(U(z)\right)_{\alpha m} = q_0^{-1}(z)\, G'(z) | \chi_{\alpha m} \rangle \qquad (2.56)$$

wie in Ref. [21] gezeigt wurde.

Die Auswertung des Operatorprodukts rechts ergibt, daß nicht nur die Matrixelemente $\langle \vec{q}_\beta | T_{\beta n,\alpha m}(E+i0) | \vec{q}'_\alpha \rangle$ beitragen, die Bedingung (2.53) erfüllen (was zu Subsystemzuständen mit positiver Energie führt), sondern daß alle Werte für $\vec{q}_\beta$ zulässig sind, da der entstehende virtuelle Zustand ja nicht beobachtbar ist. Der Aufbruch erfolgt dann durch die in U steckende Restwechselwirkung.

3. Lösungsmethoden für Dreiteilchengleichungen

Hier wollen wir einen Überblick über die Verfahren geben, die zur numerischen Behandlung des Dreiteilchenproblems geeignet sind.

Zunächst ist es nötig, sich ein Gefühl für die dabei auftretenden Schwierigkeiten zu verschaffen. Dazu betrachten wir Abb. 2, wo wir die verschiedenen Schwellen (elastische und Aufbruchsschwelle) in einem Dreiteilchensystem in Abhängigkeit von der Kopplungskonstanten des Zweiteilchenpotentials dargestellt haben.

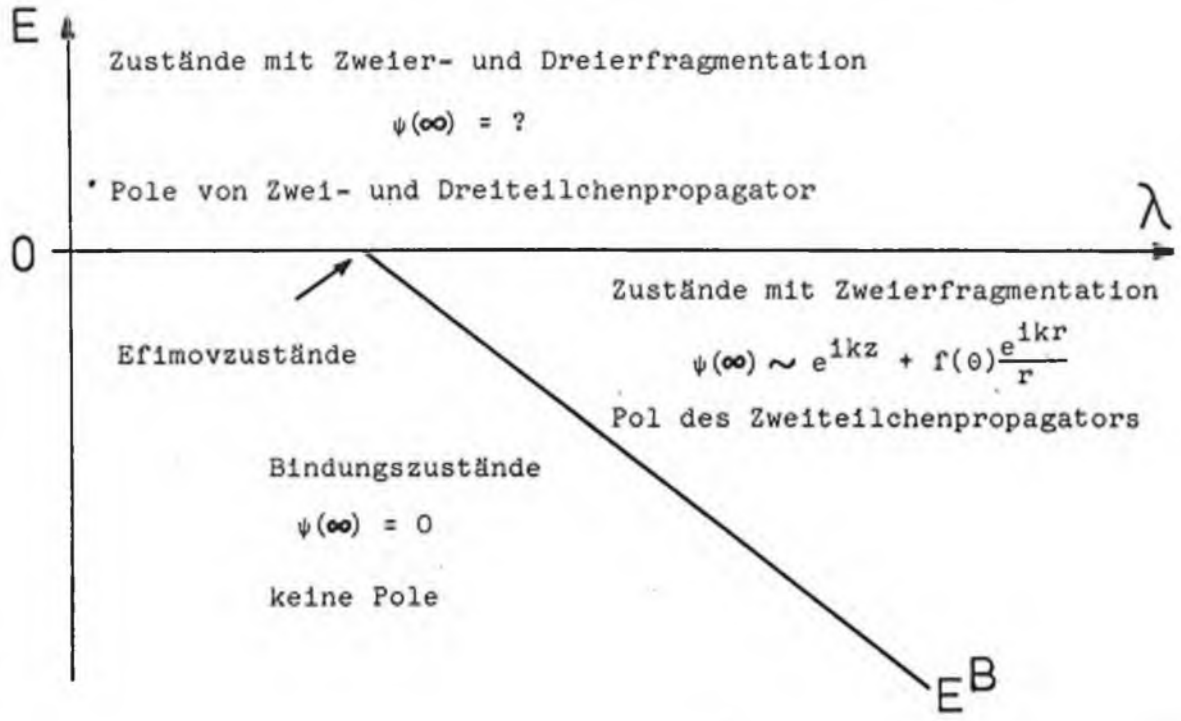


Abb. 2 Die verschiedenen im Dreiteilchenproblem interessierenden Energiebereiche in Abhängigkeit von der Kopplungskonstanten des Zweiteilchenpotentials

Es ist leicht zu verstehen, warum bei einer Lösung des Dreiteilchenproblems mit der Schrödinger Gleichung im Ortsraum die Schwierigkeiten mit wachsender Energie zunehmen: Bei jedem Überschreiten einer Schwelle wird das asymptotische Verhalten der gesuchten Lösung komplizierter. Während man im Bereich $E < E^B$

mit normierbaren Funktionen rechnet, kommen für $E^B < E < 0$ ebene und Kugelwellen hinzu. Überquert man die Aufbruchsschwelle $E = 0$, so hat man es zusätzlich noch mit dem komplizierten asymptotischen Verhalten des Aufbruchkanals zu tun, verursacht durch zerfallende Zweiteilchenzustände und dem über große Entfernungen hinweg noch möglichen Rescattering. Die genaue asymptotische Form kann aus Ref. [23,24] entnommen werden. Die besonderen Schwierigkeiten in diesem Fall haben wir in Abb. 2 mit einem Fragezeichen angedeutet.

Versucht man eine Lösung des Dreiteilchenproblems mit Integralgleichungen im Impulsraum, so hat man diese Schwierigkeiten nicht, da ja die Randbedingungen in den Kern der Integralgleichungen eingearbeitet sind. Trotzdem beobachtet man beim Überschreiten der Schwellen ebenfalls eine zunehmende Erschwernis, die ihren Grund im zunehmend komplizierten analytischen Verhalten des Kerns der Integralgleichungen hat. Während bei der Berechnung von Dreiteilchenbindungszuständen keine Singularitäten auftreten, muß man oberhalb der elastischen Schwelle Pole und Schnitte der Zweiteilchen-T-Matrizen behandeln, zu denen bei Überschreiten der Aufbruchsschwelle noch Pole und Schnitte der freien Dreiteilchenresolvente hinzukommen.

Der Vorteil von Integralgleichungen ist es, daß diese Komplikationen im Kern auftreten und deshalb wesentlich gezielter behandelt werden können als bei der Lösung des Problems mit der Schrödinger Gleichung, wo die Schwierigkeiten in der unbekannten Wellenfunktion stecken.

Eine besondere Pathologie des Dreiteilchensystems tritt auf, wenn die Kopplungskonstante so gewählt ist, daß elastische und Aufbruchsschwelle identisch sind. Dies hat zur Folge, daß für $E = 0$ die verschiedenen Singularitäten zusammenfallen. Untersucht man das Problem im Ortsraum, so sieht man, daß das asymptotische Verhalten der Wellenfunktion nicht mehr von der Reichweite des Potentials bestimmt wird, sondern sich so verhält, als ob ein Dreiteilchenpotential der Form

$$V \sim (r_{12}^2 + r_{23}^2 + r_{31}^2)^{-1} \qquad (3.1)$$

vorliegen würde. Die Konsequenz ist das Auftreten von unendlich vielen Dreiteilchenbindungszuständen, den sogenannten Efimov-zuständen [25].

Solche Zustände sind numerisch schwer nachzuweisen. Ersetzt man in den Faddeev Gleichungen für separables Potential die Integration durch eine Summe, ohne dem singulären Verhalten des Kerns explizit Rechnung zu tragen, so entdeckt man bei 12 Stützpunkten nur einen, bei 24 Stützpunkten erst zwei dieser Zustände (siehe Abb. 3).

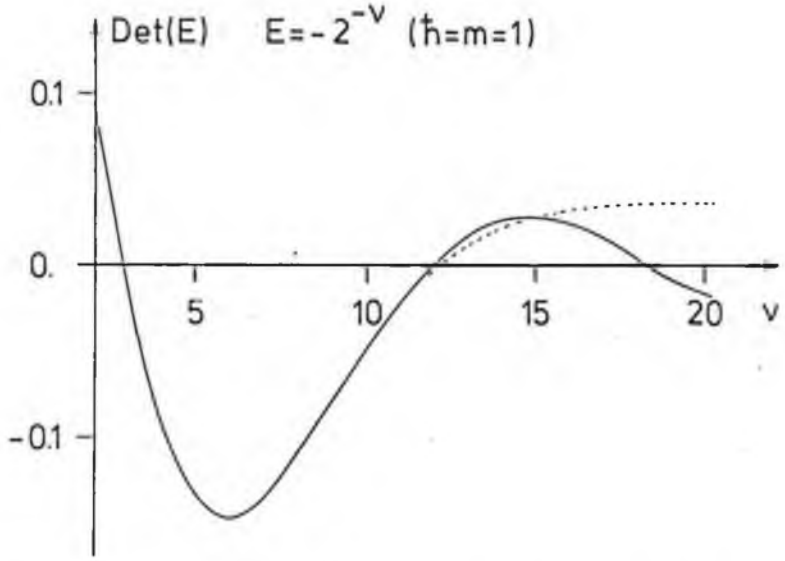


Abb. 3 Die Determinante des die Faddeev Gleichungen approximierenden Gleichungssystems in Abhängigkeit von der Energie. Die Nullstellen geben die Dreiteilchenbindungszustände - ganz links der Grundzustand. Durchgezogene Kurve: 24 Stützstellen; gestrichelte Kurve: 12 Stützstellen.

Das macht deutlich, wie subtil man unter Umständen schon unterhalb der Aufbruchsschwelle bei einer numerischen Rechnung vorgehen muß, und läßt vermuten, welche Anforderungen an eine gute numerische Rechnung oberhalb der Schwelle gestellt werden müssen.

Dies vor Augen, wollen wir nun die zur Zeit bekannten Lösungsmethoden kurz Revue passieren lassen. Dabei achten wir besonders darauf, welche Verfahren sich für den Aufbruchsfall eignen.

In Tabelle I haben wir schematisch die verschiedenen Methoden zusammengestellt. Wir interessieren uns dabei besonders für Anwendbarkeit und praktische Rechnungen oberhalb der Aufbruchsschwelle bei nichtseparabler Wechselwirkung.

Beginnen wir mit den Variationsverfahren: Ritz- und Hylleraasverfahren [26,27] bleiben auf den Bereich der Bindungszustände beschränkt. Das aus der Potentialstreuung her bekannte Kohnverfahren [28] ist auf Mehrkanalreaktionen ohne Aufbruch erweiterbar [29]. Frei von falschen Resonanzen sind die least-squares Verfahren [30-32]. Sie erlauben sogar eine Unterdrückung von falschen Resonanzen, die durch die Vernachlässigung des Aufbruchkanals entstehen [33]. Damit ist es möglich, den elastischen Kanal oberhalb der Aufbruchsschwelle zu behandeln [34,35]. Lieber, Rosenberg und Spruch [36] haben das Kohnverfahren für den Aufbruchsfall verallgemeinert. Seine Anwendung ist jedoch schwierig, da man das asymptotische Verhalten der Wellenfunktion kennen muß. Man kann jedoch versuchen, die in Ref. [36] angegebene verallgemeinerte Kato-Identität zur näherungsweisen Berechnung des Aufbruchs zu benützen, wobei man von Wellenfunktionen ausgeht, die nur im Innenraum eine gute Näherungslösung zur Schrödinger Gleichung sind [37]. Der bessere, aber auch aufwendigere Weg ist, auch für den asymptotischen Teil einen Ansatz mittels K-harmonics [38] und/oder zerfallenden Wellenpaketen [30,39] zu machen. Die Schwierigkeiten mit der Asymptotik vermeidet man, wenn man das Variationsverfahren für komplexe Koordinaten formuliert [40]. Die Einführung komplexer Koordinaten dämpft den asymptotischen Teil der Wellenfunktion auf einen exponentiellen Abfall ab. Praktische Rechnungen für lokales Potential wurden für den elastischen Kanal oberhalb der Aufbruchsschwelle durchgeführt [41]. Ebenfalls keine Kenntnis des asymptotischen Teils benötigt man in Variationsverfahren vom Schwinger Typ; ein solches Verfahren haben Pieper, Schlessinger und Wright mit Hilfe der Faddeev Gleichungen abgeleitet und auf Systeme mit separabler Wechselwirkung angewandt [42].

Unabhängig vom Potentialbegriff (und damit unabhängig von den Schwierigkeiten, die oft mit nichtseparablen Potentialen

verknüpft sind) hat Brayshaw [2] das Dreiteilchenproblem gelöst. Als Input werden die Zweiteilchenphasen verwendet. Diese bestimmen das Verhalten der Dreiteilchenwellenfunktion bei Zweierstößen. Die Dynamik bei Dreierstößen, die von Zweiteilchen - off-shell - Effekten und Dreikörperkräften bestimmt ist, wird natürlich von den Phasen nicht festgelegt und ergibt einen zusätzlichen Input.

In der weiteren Liste folgen nun Lösungsmethoden für die Faddeev Gleichungen.

Im Ortsraum wurden die Faddeev Gleichungen zum ersten Mal von Gignoux und Laverne [43] für Bindungszustände gelöst. Zur Berechnung von Streuung und Aufbruch kann man sich wie bei Bindungszuständen auf eine Lösung der Faddeev Gleichungen im Innenraum beschränken. Der Anschluß einer solchen Lösung an die asymptotische Form erfolgt über eine eindimensionale nichtsinguläre Integralgleichung, deren Lösung die interessierenden Dreiteilchenamplituden ergibt [44,45]. Erfolgreiche Rechnungen haben bis jetzt nur den elastischen Kanal oberhalb der Aufbruchsschwelle behandelt.

Im Impulsraum gibt es eine direkte Lösung der Faddeev Gleichungen nur für Bindungszustände [46,47]. Bei der numerischen Durchführung der erforderlichen zweidimensionalen Integrationen kommt man bald an die Grenzen der heutigen Rechenanlagen. Deshalb scheint eine Behandlung von Streuung und Aufbruch auf diese Weise unmöglich, da dabei die Integration noch durch die Singularitäten des Kerns erschwert wird.

Hier wäre ein Trick von Noyes [48] hilfreich. Man kann die in die Faddeev Gleichungen eingehende Zweiteilchen-T-Matrix aufspalten in einen separablen Teil und einen Rest, der on-shell und half-off-shell verschwindet [49]

$$t(z) = |f(z)\rangle \tau(z) \langle f(z)| + r(z)$$

$$\langle \vec{p}\,| r(z) |\, \vec{p}\,' \rangle = 0 \quad \text{für} \quad p^2/2\mu = z \ \text{oder} \ p'^2/2\mu = z \tag{3.2}$$

Der erste Term dieser Aufspaltung liefert, da er separabel ist, einen zwar singulären aber eindimensionalen Kern, während der zweite Term auf einen zwar zweidimensionalen aber stetigen Kern führt, da er gerade an den Polen des freien Dreiteilchenpropagators verschwindet. Auf diese Weise werden die Faddeev Gleichungen praktikabel, doch sind Rechnungen mit dieser Methode noch nicht durchgeführt worden.

Die einfachste Methode, im Fall von nichtseparablen Potentialen zu praktikablen Gleichungen zu kommen, ist die separable Entwicklungsmethode. Oberhalb der Aufbruchsschwelle gibt es jedoch nur eine Rechnung für den elastischen Kanal [50]. Dieses Verfahren wird in Zukunft kaum noch benutzt werden, da die weniger wichtigen Terme in der separablen Entwicklung das Gleichungssystem unnötig aufblähen. Eine Möglichkeit wäre, die Invertierung nur in einem Unterraum, der den wichtigsten Termen entspricht, exakt durchzuführen und das volle System dann iterativ zu lösen. Noch konsequenter und ökonomischer geht in dieser Hinsicht die auf S. 14ff besprochene Quasiteilchenmethode vor, für die es unterhalb der Aufbruchsschwelle schon seit langem [51] erfolgreiche Rechnungen gibt. Die Anwendung dieser Methode auf den Aufbruchsfall wird in den folgenden Kapiteln behandelt werden.

Last not least sei die in vielen Gebieten der Theoretischen Physik erfolgreiche Padétechnik [53] erwähnt. Diese Technik erlaubt eine Aufsummation der zu den Faddeev Gleichungen gehörende Neumannreihe. Die Lösung einer singulären zweidimensionalen Integralgleichung entfällt damit; es ist nur nötig, die singulären Integrale zu berechnen, die die einzelnen Terme der Neumannreihe liefern. Kloet und Tjon [8] haben mit dieser Methode realistische Aufbruchsrechnungen für lokale Potentiale durchgeführt.

Eng verwandt mit der Padétechnik ist die Momentenmethode [54]. Bei dieser Methode benutzt man die Neumannreihe zur Erzeugung eines Funktionenraumes, in dem die Faddeev Gleichungen dann exakt gelöst werden. Praktische Rechnungen oberhalb der Aufbruchsschwelle gibt es noch nicht.

Nach diesen Ausführungen und einen Blick auf Tabelle I mag der Eindruck entstehen, daß an erfolgreichen Rechnungen oberhalb der Aufbruchsschwelle auch bei nichtseparabler Wechselwirkung kein Mangel ist. Dieser Eindruck täuscht jedoch, denn viele Verfahren wurden bis jetzt nur auf die elastische Streuung oberhalb der Aufbruchsschwelle angewandt, außerdem stecken die meisten noch im Experimentierstadium, und man ist weit davon entfernt, Aufbruchsrechnungen so routinemäßig machen zu können wie im separablen Modell [7]. Eine Ausnahme dürften hier nur die Padérechnungen machen. Dies macht wohl klar, daß ein Bedarf an Rechnungen auf diesem Gebiet besteht und daß es nicht ganz sinnlos ist, die Quasiteilchenmethode an einem Beispiel zu erproben.

Tabelle I

Übersicht über die zur Behandlung des Dreiteilchenproblems geeigneten Methoden. Ein "x" bedeutet: geeignet, ein "-": nicht geeignet. Bei den mit $^{+)}$ versehenen Zitaten handelt es sich um Rechnungen, die nur den elastischen Kanal behandeln.

Methode		Bindungszustände	Streuung	Aufbruch	Praktische Rechnungen oberhalb der Aufbruchsschwelle für nichtseparables Potential
Ritz Hylleraas	[26,27]	x	-	-	-
Kohn	[28,29]	-	x	-	-
least-squares	[30-33]	-	x	x	[34] +)
Lieber et al.	[36]	-	x	x	[37]
komplexe Koordinaten	[40]	x	x	x	[41] +)
Pieper et al.	[42]	x	x	x	-
Brayshaw	[2]	x	x	x	[2]
Faddeev Gleichungen im Ortsraum	[44,45]	x	x	x	[44] +)
Faddeev Gleichungen im Impulsraum direkte Lösung	[46,47]	x	-	-	-
Noyes	[48]	x	x	x	-
separable Entwicklung	[50]	x	x	x	[50] +)
Quasiteilchen-methode	[14,21]	x	x	x	[52]
Padétechnik	[8]	x	x	x	[8]
Momentenmethode	[54]	x	x	x	-

4. Lösung der Quasiteilchengleichungen oberhalb der Aufbruchsschwelle

Im folgenden wollen wir eine Methode entwickeln, die es erlaubt, die singulären Quasiteilchengleichungen oberhalb der Aufbruchsschwelle zu lösen für drei identische spinlose Bosonen, die über lokale Yukawapotentiale wechselwirken. Dieses einfache Beispiel enthält einerseits die ganze Problematik, erlaubt aber andererseits, einige Integrationen analytisch auszuführen. Unsere Lösungstechnik für die singuläre Integralgleichung ist jedoch ganz allgemein, und sie läßt sich auch auf realistischere Probleme anwenden, wie zum Beispiel die d + p Reaktion, wo neben der (evtl. separabel gewählten) Kernkraft das lokale Coulombpotential auftritt. Oder auf die Behandlung von sehr komplizierten separablen Potentialen (wie z.B. das Graz Potential [55]), wobei ein umfangreiches Gleichungssystem dadurch vermieden wird, daß alle weniger wichtigen Wechselwirkungen (z.B. in höheren Drehimpulszuständen) durch die Restresolvente (Gl. (2.46)) berücksichtigt werden.

4.1 Konvergenz der Quasibornreihe

Die in Kap. 2 aufgestellten Quasiteilchengleichungen haben nur dann einen praktischen Wert, wenn man eine Aufspaltung des gegebenen Potentials in einen separablen Anteil und einen Rest findet, so daß die in Gl. (2.50) eingehende Restresolvente über die Neumannreihe

$$G'(z) = g_0(z) \sum_{\nu=0}^{\infty} \Big(\sum_{\gamma=1}^{3} V'_\gamma g_0(z) \Big)^\nu \tag{4.1}$$

bestimmen kann; denn eine Bestimmung von G' über die Resolventengleichung wäre genauso kompliziert wie die Lösung des vollen Problems. Die Neumannreihe konvergiert absolut und gleichmäßig, wenn die Operatornorm des Kerns der Resolventengleichung kleiner eins ist [10]

$$\| \sum_{\gamma=1}^{3} v'_\gamma g_0(z) \| < 1 \tag{4.2}$$

weitere Eigenschaften (z.B. Kompaktheit) sind nicht erforderlich.

Um die Konvergenz von (4.1) zu zeigen, untersuchen wir zunächst das zugrunde liegende Zweiteilchenproblem. Die Neumannreihe für

$$\hat{g}'_\gamma(z) = \hat{g}'_0 \sum_{\nu=0}^{\infty} (v'_\gamma \hat{g}_0(z))^\nu \tag{4.3}$$

konvergiert für

$$\| v'_\gamma \hat{g}_0(z) \| < 1 \tag{4.4}$$

Da $v'_\gamma g_0$ ein kompakter Operator ist, ist seine Norm durch den Betrag des größten Eigenwerts seines Spektrums gegeben

$$\| v'_\gamma \hat{g}_0(z) \| = |\eta'_0(z)| \tag{4.5}$$

Dieser Eigenwert ist in Abb. 4 wiedergegeben. Das zugrunde liegende Yukawapotential ist

$$V(r) = -2.373\, e^{-r}/r \tag{4.6}$$

Hier und im folgenden benutzen wir die Einheiten $\hbar = m = 1$. Für das vom Yukawapotential abgespaltene separable Potential wählten wir

$$V^S(\vec{q},\vec{q}') = \lambda \chi(q)\chi(q') \quad , \quad \chi(q) = (q^2+\beta^2)^{-1} \tag{4.7}$$

Mit den von uns gewählten Parametern

$$\beta = 1.9524, \quad \lambda = -1.0167 \tag{4.8}$$

hat das separable Potential die gleiche Zweiteilungsbindungsenergie

$$|E^B| = 0.099 \tag{4.9}$$

und die gleiche Zweiteilchenstreulänge

$$a = 3.965 \tag{4.10}$$

wie das Yukawapotential (4.6). Auch andere Aufspaltungen wären denkbar, z.B. die sog. ideale Wahl, bei der man für Kopplungskonstante und Formfaktor den größten Eigenwert und die zugehörige Eigenfunktion nimmt. Eine solche Wahl ist aber energieabhängig und deshalb aufwendiger in der praktischen Rechnung. Dies gilt besonders für positive Energien, wo sich der Formfaktor der idealen Wahl wie

$$\chi(q) \sim \left[q^2 - (\sqrt{z} - i)^2\right]^{-1} \tag{4.11}$$

verhält. Man ersieht aus (4.11), daß für große Energien die Reichweite des Formfaktors nicht mehr durch die Reichweite des Potentials bestimmt ist, sondern durch die Energie selbst, was zu Konvergenzschwierigkeiten bei der Berechnung von Matrixelementen führen kann. Zudem ist der Formfaktor (4.11) durch den nahe der reellen Achse liegenden Pol rasch veränderlich.

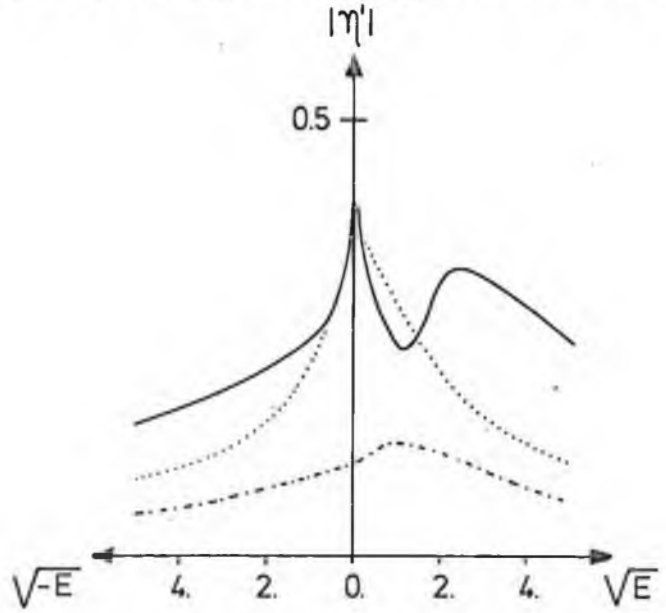


Abb. 4 Der größte Eigenwert des Restpotentials:
durchgezogene Kurve für die Wahl (4.8);
gepunktete Kurve für die ideale Wahl;
strichpunktierte Kurve für Drehimpuls
l = 2 Zustände.

Wie Abb. 4 zeigt, ist für alle Energien

$$|\eta_0'(z)| \leq |\eta_0'(0)| = 0.4 \tag{4.12}$$

d.h., die Neumannreihe für (4.3) konvergiert für alle Energien, und erst für ein Zweiteilchensystem mit dem weitaus stärkeren Potential

$$\frac{v'}{|\eta_0'(0)|} = 2.5\, v' \tag{4.13}$$

würde die Neumannreihe bei der Energie z = 0 wegen eines Bindungszustandes nicht konvergieren. Eine teilweise noch günstigere Norm würde man erreichen, wenn man für die Aufspaltung die oben angeführte ideale Wahl verwenden würde. In diesem Fall wäre die Norm gleich dem Betrag des zweitgrößten Eigenwerts des Yukawapotentials (gepunktete Kurve in Abb. 4). Wegen des damit verbundenen Aufwands haben wir jedoch auf eine solche Wahl verzichtet, zumal Rechnungen bei negativen Energien gezeigt haben, daß dabei nichts an Genauigkeit gewonnen wird [51].

Nach Gl. (4.12) konvergieren die Quasibornreihen in den Subsystemen bei allen Energien. Damit ist jedoch die Konvergenz der Reihe (4.1) noch nicht bewiesen. Es ist bekannt, daß ein Dreiteilchensystem einen Bindungszustand haben kann, obwohl seine Zweiteilchensubsysteme nicht gebunden sind. Mit der Schranke von Hall und Post [56] läßt sich aber vom Zweiteilchensystem auf das Dreiteilchensystem schließen:

$$2\, E^{(2)}(1.5\,\lambda) \leq E^{(3)}(\lambda) \tag{4.14}$$

Man erhält eine untere Schranke für einen mit der Kopplungskonstanten λ gebundenen Dreiteilchenzustand mit der Energie $E^{(3)}(\lambda)$, indem man ein fiktives Zweiteilchensystem mit der Kopplungskonstanten 1.5 λ untersucht. Da nun aber nach (4.13) unser Zweiteilchensystem erst mit der 2.5 fachen Kopplung gebunden ist, gilt

$$0 = 2E^{(2)}(2.5\lambda) < 2E^{(2)}(1.5\lambda) \leq E^{(2)}(\lambda) \qquad (4.15)$$

und somit existiert kein Dreiteilchenbindungszustand, der die Konvergenz von (4.1) stören könnte.

Freilich ist es immer noch möglich, daß Dreiteilchenresonanzpole die Konvergenz stören. Dies kann man, wie wir gleich sehen werden, in Strenge nicht ausschließen. Wir werden aber einige Argumente anführen, die die Konvergenz dennoch plausibel machen.

Um die Konvergenz der Reihe (4.1) weiter zu untersuchen, schätzen wir die Norm des Operators $g_0(z)\sum v'_\gamma$ mit der Dreiecksungleichung ab und drücken die Operatoren $g_0(z)v'_\gamma$ durch die entsprechenden Operatoren im Subsystem γ aus:

$$\begin{aligned} \| g_0(z)\sum_{\gamma=1}^{3} v'_\gamma \| &\leq \sum_{\gamma=1}^{3} \| g_0(z)v'_\gamma \| \\ &= \sum_{\gamma=1}^{3} \| \hat{g}_0(z-\overline{q_\gamma^2/2M_\gamma})v'_\gamma \| = \sum_{\gamma=1}^{3} |\eta'_0(z-\overline{q_\gamma^2/2M_\gamma})| \end{aligned} \qquad (4.16)$$

Dabei ist $\overline{q_\gamma^2/2M_\gamma}$ die mittlere kinetische Energie von Teilchen γ. Da man diese Energie nicht kennt, kann man den Ausdruck (4.16) nur grob mit dem Maximum von $|\eta'_0(z)|$ abschätzen:

$$\| g_0(z)\sum_{\gamma=1}^{3} v'_\gamma \| \leq 3|\eta'_0(0)| = 1.2 \qquad (4.17)$$

Wir können also nur zeigen, daß die Norm kleiner als 1.2 ist und nicht, daß sie kleiner als 1 ist, woraus die Konvergenz der Quasibornreihe (4.1) folgen würde.

Wir können aber drei Argumente geben, die deutlich machen, daß die Quasiteilchenmethode dennoch anwendbar ist:

a) Da wir die mittlere kinetische Energie eines Teilchens nicht kennen, mußten wir $|\eta'_0|$ durch seinen Maximalwert abschätzen, im Mittel ist aber $|\eta'_0|$ bedeutend kleiner (s. Abb. 4).

b) Wendet man die Abschätzung (4.17) auf das Bindungsproblem an, so ergibt das Theorem von Hall und Post, daß die Abschätzung um einen Faktor 2 zu groß ist.

c) Letztlich interessiert nur die Konvergenz der Reihe

$$\sum_{\nu=0}^{\infty} \langle \chi_{\beta u} | \left(g_0(z) \sum_{\gamma=1}^{3} V_\gamma' \right)^\nu g_0(z) | \chi_{\alpha m} \rangle \qquad (4.18)$$

siehe Gl. (2.50), die natürlich noch schwerer zu zeigen ist als die der Reihe (4.1). Doch kann man plausibel machen, daß die Situation hier günstiger ist. Es treten nämlich in jeder Ordnung Operatorkombinationen auf

$$\begin{aligned} &\langle \chi_{\beta u} | (g_0(z) V_\beta')^{\mu_1} \dots (g_0(z) V_\alpha')^{\mu_2} g_0(z) | \chi_{\alpha m} \rangle \\ &\qquad = \langle \tilde{\chi}_{\beta u} | \dots g_0(z) | \tilde{\chi}_{\alpha m} \rangle \end{aligned} \qquad (4.19)$$

die nur zu Modifikationen der Formfaktoren führen. Die Beiträge solcher Matrixelemente erweisen sich in der praktischen Rechnung als klein, so daß man z.B. in erster Ordnung nur ein wesentliches Matrixelement hat, während die Abschätzung (4.17) allen drei Matrixelementen das gleiche Gewicht gibt.

4.2 Berechnung des effektiven Potentials

Da die Auswertung der Operatorprodukte in (4.18) auf hochdimensionale Integrale führt, beschränkt man sich auf die sog. nullte Quasibornapproximation (0.QBA)

$$G'(z) \approx g_0(z) \qquad (4.20)$$

und die erste Quasibornapproximation (1.QBA)

$$G'(z) \approx g_0(z) + g_0(z) \sum_{\gamma=1}^{3} V_\gamma' g_0(z) \qquad (4.21)$$

Da die 0.QBA dem rein separablen Fall entspricht, liefert der

Vergleich von O. und 1. QBA bereits eine Aussage über die Wichtigkeit nichtseparabler Anteile. Wo bisher Vergleiche mit exakten Rechnungen möglich waren, hat sich stets gezeigt, daß die 1.QBA der exakten Lösung recht nahe kommt, so daß man sagen kann, daß die 1.QBA den Hauptteil der Korrektur beinhaltet.

Da wir ein System von identischen Teilchen betrachten, reduziert sich das gekoppelte Integralgleichungssystem (2.52) nach Variablenumbenennung und Aufaddieren zu einer Integralgleichung

$$T(z) = V(z) + V(z) G_0(z) T(z) \tag{4.22}$$

mit

$$T(z) = T_{11}(z) + 2\, T_{21}(z) \quad , \quad V(z) = V_{11}(z) + 2\, V_{21}(z) \tag{4.23}$$

In O.QBA erhält man für das effektive Potential

$$V(z) = 2 \langle \chi_2 | g_0(z) | \chi_1 \rangle \equiv V^{(0)}_{(z)} \tag{4.24}$$

In 1.QBA erhält man

$$\begin{aligned} V(z) = 2 \{ & \langle \chi_2 | g_0 | \chi_1 \rangle + \langle \chi_2 | g_0 V_1' g_0 | \chi_1 \rangle + \langle \chi_2 | g_0 V_2' g_0 | \chi_1 \rangle \\ & + \langle \chi_2 | g_0 V_3' g_0 | \chi_1 \rangle + \langle \chi_2 | g_0 V_1' g_0 | \chi_2 \rangle \} \equiv \sum_{i=0}^{4} V^{(i)}_{(z)} \end{aligned} \tag{4.25}$$

Eine graphische Darstellung des effektiven Potentials in 1.QBA zeigt Abb. 5. Dabei ist die freie Bewegung eines Teilchens durch eine einzelne Linie, die Bewegung eines Zweiteilchenbindungszustandes durch eine Doppellinie und die Formfaktoren durch Halbkreise dargestellt.

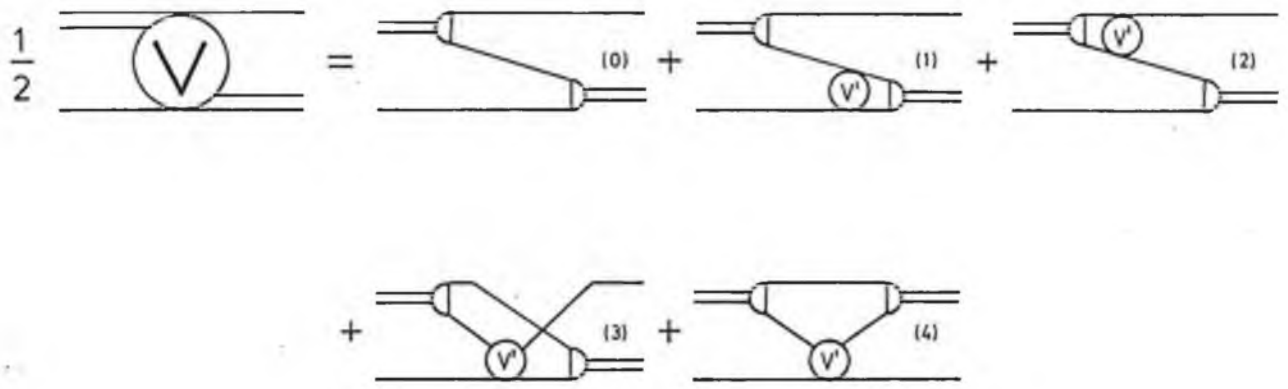


Abb. 5 Graphische Darstellung des effektiven Potentials in 1.QBA

Die ersten drei Graphen haben eine sehr ähnliche Struktur, da der Austausch der Restwechselwirkung nur zu einer Modifikation der Formfaktoren führt

$$|\tilde{\chi}_i\rangle = V_i' g_0 |\chi_i\rangle \quad , \quad i = 1,2 \qquad (4.26)$$

Die Auswertung der Graphen 0,1,2 gibt deshalb (bis auf evtl. Modifikationen der Formfaktoren)

$$\langle \vec{q}\,| V^{(0,1,2)}_{(z)} |\vec{q}\,'\rangle = \frac{\chi(|\vec{q}\,' + \vec{q}/2|)\,\chi(|\vec{q} + \vec{q}\,'/2|)}{z - \frac{3}{4}q^2 - (\vec{q}/2 + \vec{q}\,')^2} \qquad (4.27)$$

Für positive Energien haben diese Graphen einen Pol, sooft sich die drei Teilchen auf der Energieschale bewegen. Die zweite Greensfunktion, die in (4.26) auftritt, führt zu keinen Singularitäten, da bei der Berechnung des modifizierten Formfaktors über den Pol von g_0 integriert wird. Dies ergibt lediglich einen Schnitt für

$$z - \tfrac{3}{4}q^2 \geq 0 \quad \text{bzw.} \quad z - \tfrac{3}{4}q'^2 \geq 0 \qquad (4.28)$$

Die Auswertung der Graphen 3 und 4 führt auf

$$\langle \vec{q}\,|V^{(3,4)}_{(z)}|\,\vec{q}\,'\rangle = \int d^3k \frac{\chi(|\vec{k}+\vec{q}/2|)\,v'(-(\vec{q}+\vec{k}/2),\pm(\vec{q}\,'+\vec{k}/2))\,\chi(|\vec{k}+\vec{q}\,'/2|)}{\left[z-\frac{3}{4}q^2-(\vec{q}/2+\vec{k}\,')^2\right]\left[z-\frac{3}{4}q'^2-(\vec{q}\,'/2+\vec{k})^2\right]} \qquad (4.29)$$

Hier wird über beide Greensfunktionen integriert, was bei Zusammenfallen der Pole im Integranden zu Singularitäten des Integrals führen kann.

Die genauere Untersuchung zeigt, daß nicht jeder Doppelpol zu einer Singularität führt. Schneiden sich die durch das Verschwinden der beiden Nenner definierten Kugeln, oder berühren sie sich von innen, so liegt eine Singularität des Integranden vom folgenden Typ vor

$$\int \frac{dx}{(x+i\epsilon)^2} \qquad (4.30)$$

In diesem Fall bleibt das Integral endlich, da man den Integrationsweg ins Komplexe verschieben darf. Berühren sich die Kugeln jedoch von außen, so liegt eine sog. pinch Singulatität vor

$$\int \frac{dx}{(x+i\epsilon)(x-i\epsilon)} \qquad (4.31)$$

Das Integral divergiert, da alle möglichen Integrationswege bei $x = 0$ eingeklemmt werden und im Limes $\epsilon \to 0$ über den Doppelpol führen. Wie das Studium des von Lewis [57] berechneten Dreinennerintegrals zeigt, ergibt sich dabei eine logarithmische Singularität in der Variablen

$$\xi = \hat{q}\cdot\hat{q}\,' \qquad (4.32)$$

Schrumpfen die sich berührenden Kugeln auf den Radius Null ($q,q' \to \sqrt{4E/3}$), so ergibt sich eine Wurzelsingularität. Die Schnitte entsprechen denen der Graphen 2 und 3.

Die Partialwellenzerlegung

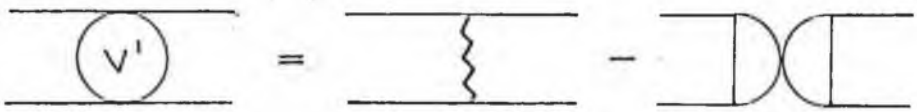
$$T_L(q,q') = \frac{1}{2}\int_{-1}^{1} d\xi\, P_L(\xi)\, T(\vec{q},\vec{q}')$$
$$V_L(q,q') = \frac{1}{2}\int_{-1}^{1} d\xi\, P_L(\xi)\, V(\vec{q},\vec{q}') \qquad (4.33)$$

die die dreidimensionale Integralgleichung zu einer eindimensionalen Integralgleichung macht

$$T_L(q,q') = V_L(q,q') + 4\pi\int_0^\infty dq''\, q''^2\, V_L(q,q'')\,\Delta(q'')\,T_L(q'',q') \qquad (4.34)$$

glättet das effektive Potential soweit, daß die Singularitäten von $V^{(3,4)}$ verschwinden und die Pole von $V^{(0,1,2)}$ zu logarithmischen Singularitäten werden.

Die direkte numerische Berechnung der Integrale ((4.29),(4.33)) wäre nur durch ein aufwendiges, in jeder Variablen durchzuführendes Subtraktionsverfahren möglich. Um das zu vermeiden, nutzen wir die spezielle Form der Restwechselwirkung



(4.35)

aus, (die Wellenlinie steht für das lokale Potential), und studieren die sich ergebenden Graphen (s. Abb. 6).

Da wir speziell Yukawawechselwirkung und Yamaguchiformfaktoren gewählt haben, lassen sich alle das Yukawapotential beinhaltende Graphen auf Summen von Dreinennerintegralen zurückführen [51]. Das Dreinennerintegral ergibt sich zu [57]

$$\int d^3k \prod_{i=1}^{3}\left[(\vec{k}-\vec{p}_i)^2+\eta_i^2\right]^{-1} = \frac{\pi^2}{(\rho^2-\delta)^{1/2}}\ln\left[\frac{\rho+(\rho^2-\delta)^{1/2}}{\rho-(\rho^2-\delta)^{1/2}}\right] \qquad (4.36)$$

mit ($p_3 = 0$ o.B.d.A.)

$$\varsigma = \eta_3\left((\vec{p}_1-\vec{p}_2)^2+(\eta_1+\eta_2)^2\right)+\eta_2\left(p_1^2+\eta_1^2+\eta_3^2\right)+\eta_1\left(p_2^2+\eta_2^2+\eta_3^2\right) \tag{4.37}$$

$$\delta = \left((\vec{p}_1-\vec{p}_2)^2+(\eta_1+\eta_2)^2\right)\left(p_1^2+(\eta_1+\eta_3)^2\right)\left(p_2^2+(\eta_2+\eta_3)^2\right)$$

Für den Fall

$$\eta_i^2 < 0 \tag{4.38}$$

ist

$$\eta_i = -i\sqrt{-\eta_i^2} \tag{4.39}$$

zu wählen.

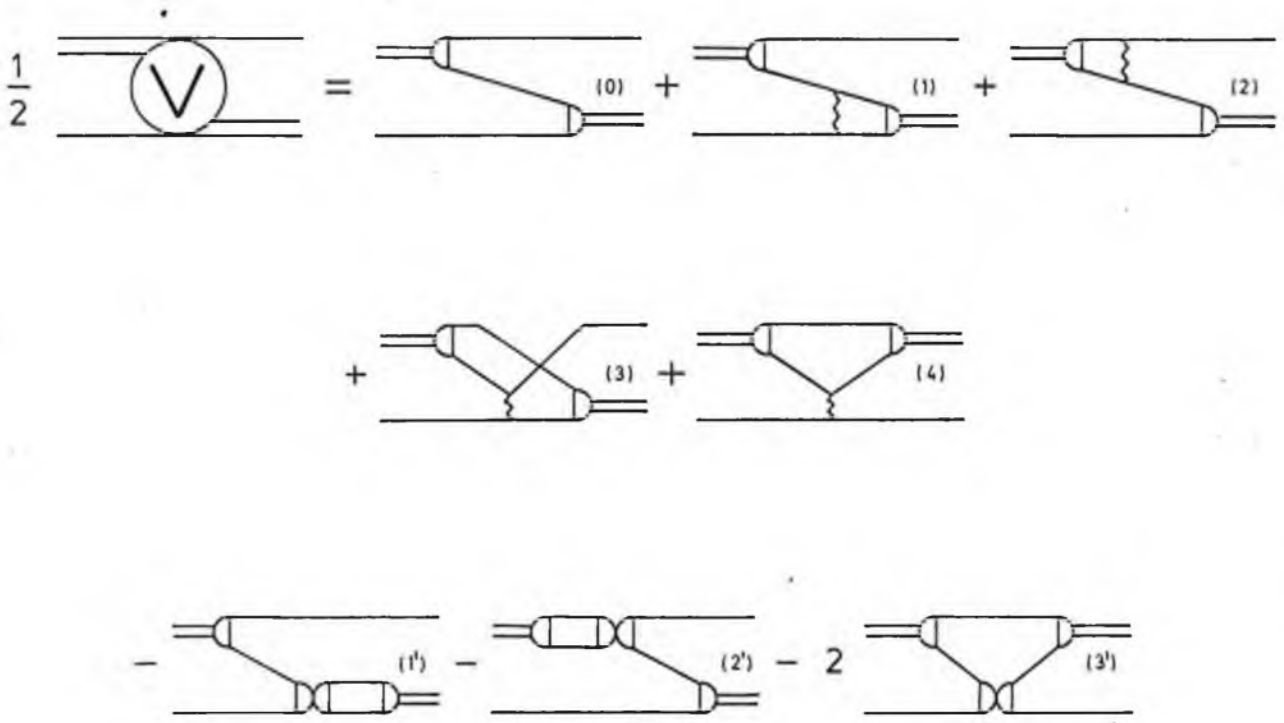


Abb. 6 Graphische Darstellung des effektiven Potentials mit der Restwechselwirkung von Gl. (4.35)

Die Graphen $V^{(1')}$ und $V^{(2')}$ sind einfach zu berechnen. Sie unterscheiden sich von $V^{(0)}$ durch den Faktor

$$\lambda \langle \chi | \hat{q}_0(\hat{z}) | \chi \rangle = \lambda \int \frac{\chi^2(p)}{p^2 - \hat{z}} d^3p = \lambda \frac{\pi^2}{\beta(\beta + \sqrt{-\hat{z}})^2} \qquad (4.40)$$

für

$$\hat{z} > 0 \qquad (4.41)$$

ist

$$\sqrt{-\hat{z}} = -i\sqrt{\hat{z}} \qquad (4.42)$$

zu wählen.

Schwieriger sind die Graphen $V^{(3')}$ und $V^{(4')}$ zu berechnen (man überlegt sich leicht, daß $V^{(3')} = V^{(4')}$ sein muß). Zunächst sieht man, daß es sich hier um ein Produkt von zwei Graphen $V^{(0)}$ handelt

$$\langle \vec{q} | V^{(3')} | \vec{q}' \rangle = \lambda \int d^3k \langle \vec{q} | V^{(0)} | \vec{k} \rangle \langle \vec{k} | V^{(0)} | \vec{q}' \rangle \qquad (4.43)$$

Diese Produktform läßt sich bei der Berechnung der Partialwellenprojektion ausnützen. Transformiert man von den Variablen $\vec{k}, \hat{q} \cdot \hat{q}'$ auf $|\vec{k}|, \hat{q} \cdot \hat{k}, \hat{q}' \cdot \hat{k}$ und auf den Winkel, um den man die in k-Richtung liegende Achse drehen muß, um die Ebenen $(\vec{k}, \vec{q})$ und $(\vec{k}, \vec{q}')$ zur Deckung zu bringen, so lassen sich die Integrationen bezüglich der letzten drei Variablen durchführen, und man erhält [51]

$$V_L^{(3')}(q, q') = 4\pi\lambda \int_0^\infty k^2 dk \, V_L^{(0)}(q, k) V_L^{(0)}(k, q') \qquad (4.44)$$

Damit sind alle in 1.QBA vorkommenden Integrationen bis auf eine analytisch ausgeführt. Bei den die Yukawawechselwirkung beinhaltenden Graphen ist die Partialwellenprojektion numerisch durchzuführen, bei dem Graphen (3') die $|\vec{k}|$-Integration.

So günstig es insbesondere bei positiven Energien ist, daß je drei Integrationen immer analytisch zu berechnen sind, so ist es doch von Nachteil, daß die Graphen mit verschiedenen Methoden berechnet werden. Dadurch ergibt sich die Korrektur zur 0.QBA als Differenz großer Zahlen, die deshalb entsprechend genau berechnet werden müssen.

4.3 Lösungsmethoden für singuläre Integralgleichungen

Hier wollen wir die oben erwähnten Singularitäten des Kerns der Integralgleichung noch genauer studieren und dann nach Verfahren Ausschau halten, die es erlauben, solche Integralgleichungen zu lösen.

Zunächst finden wir einen Pol im Propagator G_0, wenn sich Zweiteilchenbindungszustand und freies Teilchen on-shell bewegen:

$$\langle \vec{q}|G_0(z)|\vec{q}'\rangle \sim \frac{\delta(\vec{q}-\vec{q}')}{E+i\epsilon-E^B-\frac{3}{4}q'^2} \quad . \tag{4.45}$$

Dieser Pol tritt nur für einen festen Wert der Integrationsvariablen auf ("fixed point singularity")

$$q' = \sqrt{\tfrac{4}{3}(E+E^B)} \quad , \quad E \geq E^B \quad . \tag{4.46}$$

Bewegen sich alle drei Teilchen frei und on-shell, so hat der freie Dreiteilchenpropagator, und somit die Graphen 0,1,2, einen Pol

$$\langle \vec{q}|V^{(0,1,2)}_{(z)}|\vec{q}'\rangle \sim (E+i\epsilon-q^2-q'^2-\vec{q}\cdot\vec{q}')^{-1} \tag{4.47}$$

Bei der Partialwellenzerlegung wird daraus

$$V^{(0,1,2)}_L(q,q') \sim \frac{1}{2}\int_{-1}^{1} \frac{d\xi\, P_L(\xi)}{E+i\epsilon-q^2-q'^2-qq'\xi} \tag{4.48}$$

$$= Q_L\left(\frac{-E+q^2+q'^2}{qq'}\right)(-1)^{L+1}$$

Die hier auftretende Legendrefunktion 2. Art Q_L hat logarithmische Singularitäten, wenn für das Argument gilt

$$\left|\frac{E-q^2-q'^2}{qq'}\right| = 1 \quad , \quad E \geq 0 \tag{4.49}$$

Das sind genau die Fälle, in denen der Pol des freien Dreiteilchenpropagators auf die Endpunkte der ξ-Integration trifft.

Liegt der Pol im Integrationsintervall, so resultiert daraus nur ein Schnitt.

Aus Gl. (4.49) folgt, daß die logarithmischen Singularitäten nicht für einen festen Wert der Integrationsvariablen auftreten; es sind sog. "moving point singularities". Diese Singularitäten erschweren die Lösung der Integralgleichung am meisten.

Als nächstes interessiert die Frage, wie sich die hier diskutierten Singularitäten auf die Lösung auswirken. Die Antwort ist in O.QBA bekannt und ist äußerst günstig: Die Lösung ist analytisch bis auf einen Wurzelverzweigungspunkt bei $q' = \sqrt{4E/3}$ und einen Schnitt für $q' < \sqrt{4E/3}$ [58]. Inwieweit sich die in 1.QBA hinzukommenden (schwächeren) Singularitäten auswirken, ist nicht bekannt, und wir werden deshalb gut daran tun, unter den nun zu diskutierenden Lösungsmethoden diejenige auszuwählen, die nur ein Minimum an Voraussetzungen an die Lösung stellt.

Problemlos ist der Propagatorpol zu behandeln, da seine Lage fest ist. Man kann ihn eliminieren [49,59,60], oder man integriert in geeigneter Weise über ihn hinweg [61,62], wobei man ausnutzt, daß gilt

$$\mathcal{P}\int_{-\Delta}^{\Delta} \frac{dx}{x} = 0 \qquad (4.50)$$

Schwieriger ist die Behandlung der nicht fixierten logarithmischen Singularitäten. Es gibt zwar Integrationsregeln, die speziell auf logarithmische Singularitäten zugeschnitten sind [63], doch können wir sie hier nicht verwenden, da die logarithmischen Singularitäten in Abhängigkeit von der Variablen q ihre Lage ändern und wir für jeden Wert von q eine neue Stützstellenverteilung $\{q_j'(q)\}$ einführen müßten. Auf diese Weise werden immer mehr Unbekannte $T(q_j'(q))$ eingeführt, als lineare Gleichungen dafür vorhanden sind.

4.3.1 Eine Subtraktionsmethode

Ähnlich ist auch die Lage, wenn man die logarithmischen Singularitäten mit einer Subtraktionstechnik behandelt. Sei s(q) die Lage der Singularitäten, so kann man für Gl. (4.34) schreiben (die Abhängigkeit vom on-shell Impuls haben wir unterdrückt)

$$T_L(q) = V_L(q) + \int_0^\infty dq' K_L(q,q')\left(T_L(q') - T_L(s(q))\right) + T_L(s(q)) \int_0^\infty dq' K_L(q,q') \tag{4.51}$$

Damit wird der Integrand des ersten Integrals stetig, und eine Standardintegrationsregel kann angewandt werden. Das zweite Integral enthält die Unbekannte nicht und kann deshalb als bekannt vorausgesetzt werden. Führt man das erste Integral mit Hilfe einer Integrationsregel aus, so erhält man

$$T_L(q) = V_L(q) + \sum_{j=1}^{n} w_j K_L(q,q_j)\left(T_L(q_j) - T_L(s(q))\right) + T_L(s(q)) \int_0^\infty dq' K_L(q,q') \tag{4.52}$$

Damit hat man n Unbekannte $T_L(q_j)$. Setzt man $q = q_i$, so erhält man dafür n lineare Gleichungen

$$T_L(q_i) = V_L(q_i) + \sum_{j=1}^{n} w_j K_L(q_i,q_j)\left(T_L(q_j) - T_L(s(q_i))\right) + T_L(s(q_i)) \int_0^\infty dq' K_L(q_i,q') \tag{4.53}$$

Dabei entdeckt man aber gleichzeitig zusätzlich neue n-Unbekannte, nämlich $T_L(s(q_i))$, es sei denn, die Menge $\{q_i\}$ und die Menge $\{s(q_i)\}$ sind identisch, wie es z.B. der Fall ist, wenn die

Singularitäten längs der Geraden q' = q liegen. Im allgemeinen aber bringt das Verfahren eine größere Anzahl von Unbekannten als lineare Gleichungen mit sich. Im vorliegenden Fall kann man das Verfahren aber trotzdem anwenden, da die Lage der logarithmischen Singularitäten symmetrisch zu q' = q ist

$$q = S(q') \quad , \quad q' = S(q) \quad . \tag{4.54}$$

Das stoppt die unbegrenzte Vermehrung der Unbekannten, da man nur für jeden Integrationspunkt q_j auch $s(q_j)$ als Integrationspunkt einführen muß, um wegen Gl. (4.54) die Mengen $\{q_i\}$ und $\{s(q_i)\}$ identisch zu machen. In Wirklichkeit ist das Verfahren noch etwas komplizierter, da in unserem Fall s(q) zweideutig ist. Man muß deshalb für jeden eingeführten Integrationspunkt drei Ergänzungspunkte einführen. Der Nachteil des Verfahrens ist, daß die entstehende Stützstellenverteilung nicht zu einer Standardintegrationsregel gehört und man sich die zugehörige Integrationsregel selbst konstruieren muß.

4.3.2 Mellintransformation

Nach dem in Zusammenhang mit Abb. 2, S. 20, Gesagten ist klar, daß man bei einer Fouriertransformation die Singularitäten zwar los wird, sich aber dafür Oszillationen einhandelt, die eine praktische Lösung ebenfalls erschweren, da sie noch im asymtotischen Teil berücksichtigt werden müssen. Führt man statt dessen eine Mellintransformation [64] durch, so ist man frei von dieser Schwierigkeit. Zur praktischen Lösung wurde diese Methode jedoch noch nicht verwendet.

4.3.3 Integration im Komplexen

Man kann der schwierigen Integration über die Singularitäten ausweichen, indem man den Cauchysatz anwendet und die Integration ins Komplexe verlegt. Im Komplexen kann man, da der Kern stetig ist, die Integralgleichung leicht lösen, hat dann aber das Problem, wie man die analytische Fortsetzung der Lösung zu reellen

Impulsen bewerkstelligt. Dies kann über die Integralgleichung geschehen, indem man nochmals den Cauchysatz anwendet, um eine Iteration der Integralgleichung zu berechnen, wobei man von der Lösung für komplexe Impulse ausgeht [5,6,7,65,66]. Auch die Padétechnik kann man zur analytischen Fortsetzung verwenden [67]. Voraussetzung für die Anwendbarkeit ist jedoch, daß die analytische Struktur von Kern und Lösung eine Verschiebung von Integrationswegen zuläßt. In O.QBA ist (im Gegensatz zur 1.QBA) die analytische Struktur der Lösung bekannt, und deshalb wird dieses Verfahren im separablen Modell häufig angewandt. Nicht anzuwenden ist diese Methode, wenn der Kern überhaupt nicht analytisch ist. Das ist dann der Fall, wenn der Kern nur als Tabelle vorliegt, z.B. wenn das zugrunde gelegte Nukleon-Nuleon Potential durch Lösung des inversen Streuproblems bestimmt wurde.

4.3.4 Einmalige Iteration

Iteriert man Gl. (4.34) einmal, nachdem man den Pol des Propagators eliminiert hat, so wird der Kern der neuen Gleichung stetig, da die Integration über die logarithmischen Singularitäten ein endliches Resultat liefert [68,69]. Das Problem besteht nur darin, singuläre Integrale zu berechnen, wofür es genügend Verfahren gibt.

4.3.5 Padétechnik

Auch hier berechnet man Iterationen, jedoch soviel, daß man daraus mit Padétechnik die Lösung bestimmen kann und somit eine Lösung der Integralgleichung (was immer mit der Invertierung einer großen Matrix verbunden ist) entfällt. Die Methode wurde zunächst von Tjon [8,70] für die zweidimensionalen Faddeev Gleichungen entwickelt und angewendet - Brady und Sloan [71] demonstrierten dann im separablen Fall (wo Lösungen nach anderen Methoden - etwa 4.3.3 - vorliegen) die rasche Konvergenz des Verfahrens. Auch eine Lösung der Quasiteilchengleichungen wurde kürzlich mit dieser Methode versucht [72].

4.3.6 Produktintegration

Wenn es möglich ist, für den Kern der singulären Integralgleichung (bzw. für den Teil des Kerns, der die Singularitäten enthält) einen Satz von Integralen zu berechnen

$$a_{i\nu} = \int_0^\infty dq' K_L(q_i, q') f_\nu(q') \quad , i,\nu = 1,\dots n \quad , \tag{4.55}$$

so kann man dieses Wissen ausnützen, um für die in der Intralgleichung auftretende Integration eine spezielle Integrationsregel aufzustellen:

$$a_{i\nu} = \sum_{j=1}^{n} W_{ij} f_\nu(q_j) \quad . \tag{4.56}$$

Dies ergibt ein lineares Gleichungssystem für die Gewichte W_{ij}, dessen Lösung es wiederum erlaubt, die Integralgleichung in ein lineares Gleichungssystem zu verwandeln

$$T_L(q_i) = V_L(q_i) + \sum_{j=1}^{n} W_{ij} T_L(q_j) \quad . \tag{4.57}$$

Dieses Verfahren wurde von Kim [73] angewandt, um die zweidimensionalen Faddeev Gleichungen für Bindungszustände zu lösen. Im separablen Modell wurde es von Doleschall [74] angewandt. Er nutzte aus, daß man in der Wahl der Funktionen relativ frei ist, und erreichte durch die Wahl

$$f_\nu(q) = q^\nu \quad , \tag{4.58}$$

daß die Bestimmung der W_{ij} unabhängig von der Energie vorgenommen werden kann (allerdings muß man die W_{ij} für jeden Drehimpuls extra bestimmen).

4.3.7 Interpolationsmethode

Approximiert man die gesuchte Lösung durch ein Interpolationspolynom [75,76]

$$T_L(q) \approx \sum_{j=1}^{n} T_L(q_j) H_j(q) \quad , \quad H_j(q) = \prod_{\nu \neq j} \frac{(q - q_\nu)}{(q_j - q_\nu)} \tag{4.59}$$

so erhält man durch Einsetzen in die Integralgleichung

$$T_L(q) = V_L(q) + \sum_{j=1}^{n} T_L(q_j) \int_0^\infty dq' K_L(q,q') H_j(q') \,. \qquad (4.60)$$

Für die n Unbekannten $T_L(q_j)$ erhält man durch $q = q_i$ n lineare Gleichungen

$$T_L(q_i) = V_L(q_i) + \sum_{j=1}^{n} T_L(q_j) \int_0^\infty dq' K_L(q_i,q') H_j(q') \,, \qquad (4.61)$$

wodurch wiederum das Lösen einer singulären Integralgleichung auf die Berechnung von singulären Integralen

$$I_{ij} = \int_0^\infty dq' K_L(q_i,q') H_j(q') \qquad (4.62)$$

zurückgeführt ist.

Die Verwandtschaft zur Produktintegration ist ersichtlich. Zur Bestimmung der Gewichte I_{ij} ist jedoch keine numerische Lösung eines linearen Gleichungssystems nötig, da in unserem Fall gilt

$$H_j(q_i) = \delta_{ij} = f_j(q_i) \,. \qquad (4.63)$$

Dadurch wird die Lösung des Systems (4.56) trivial.

Die Güte des Verfahrens ist nicht von der Güte der Approximation der Lösung abhängig, sondern nur von der Güte der Approximation

$$\int_0^\infty dq' K_L(q_i,q') T_L(q') \approx \sum_{j=1}^{n} T_L(q_j) \, I_{ij} \qquad (4.64)$$

Hat man erst die Lösung an den Stützstellen bestimmt, so kann man für die Berechnung von weiteren Werten $T_L(q)$ die eingeführte Approximation vergessen und an ihrer Stelle Gl. (4.60) zur Interpolation verwenden.

Z.B. ist es eine schlechte Approximation, wenn man in der Nähe des Verzweigungspunktes, wo sich T_L verhält wie

$$T_L(q) = \alpha + \beta \sqrt{\tfrac{3}{4} q^2 - E} \qquad (4.65)$$

ein Interpolationspolynom in q ansetzt. Im Sinne von Gl. (4.64) muß dies jedoch keine schlechte Näherung sein, und in der Tat zeigt die Lösung $T_L(q_i)$ genau das in Gl. (4.65) angegebene Wurzelverhalten, weil ihr dies bei genügend genauer Auswertung von (4.62) von den Integralen I_{ij} aufgeprägt wird.

Hiermit wollen wir die Liste von möglichen Lösungsmethoden schließen, obwohl sie keineswegs vollständig ist. Z.B. könnte man sich eine Entwicklung der Lösung vorstellen

$$T_L(q) \approx \sum_{j=1}^{n} c_j \varphi_j(q) \tag{4.66}$$

deren Entwicklungskoeffizienten man durch

$$\sum_{j=1}^{n} c_j \int_0^\infty \varphi_\nu(q') \varphi_j(q')\, dq' = \int_0^\infty \varphi_\nu(q') V_L(q')\, dq' + \sum_{j=1}^{n} c_j \int_0^\infty \varphi_\nu(q') K_L(q',q'') \varphi_i(q'')\, dq'\, dq'' \tag{4.67}$$

bestimmt. Dieses Verfahren kann aber mit dem oben genannten nicht konkurrieren, da man hier zweidimensionale Integrale berechnen muß. Diese Mühe lohnt sich erst, wenn man das Verfahren zu einem Variationsverfahren ausbaut [42].

4.4 Lösung der Quasiteilchengleichung mit der Interpolationsmethode

Die Anwendung der Interpolationsmethode hat gegenüber der Integration im Komplexen den Vorteil, daß man sich das analytische Verhalten von Kern und Lösung nicht im Komplexen überlegen muß. Dies ist bei der etwas komplizierten Struktur der Graphen in 1.QBA von großem Wert.

Nach den in Abschnitt 4.2 durchgeführten Betrachtungen über die Stetigkeit des effektiven Potentials kann man für dessen Partialwellenprojektion schreiben

$$V_L(q,q') = \frac{1}{2qq'} \int_{-1}^{1} \frac{P_L(\xi)\,d\xi}{\eta + i\epsilon - \xi} F(q,q',\xi) + S_L(q,q') \tag{4.68}$$

Dabei ist

$$F(q,q',\xi) = \chi(|\vec{q} + \vec{q}'/2|)\,\chi(|\vec{q}' + \vec{q}/2|)$$
$$+ \chi(|\vec{q} + \vec{q}'/2|)\,\tilde{\chi}(|\vec{q}' + \vec{q}/2|) + \tilde{\chi}(|\vec{q} + \vec{q}'/2|)\,\chi(|\vec{q}' + \vec{q}/2|) \tag{4.69}$$

und

$$\eta = \frac{E - q^2 - q'^2}{qq'} \tag{4.70}$$

S steht für die nach Partialwellenprojektion stetigen Beiträge der Graphen 3 und 4. Zur Integration über den für $|\eta| < 1$ singulären Integranden führen wir die folgende Subtraktion durch

$$V_L(q,q') = \frac{F(q,q',\eta)}{2qq'} \int_{-1}^{1} \frac{P_L(\xi)\,d\xi}{\eta + i\epsilon - \xi} + S_L(q,q')$$
$$+ \frac{1}{2qq'} \int_{-1}^{1} \frac{\left(F(q,q',\xi) - F(q,q',\eta)\right) P_L(\xi)\,d\xi}{\eta - \xi} \tag{4.71}$$

Das verbleibende singuläre Integral läßt sich analytisch auswerten. Das zweite Integral ergibt einen stetigen Beitrag, den wir zusammen mit dem ebenfalls stetigen Beitrag $S_L(q,q')$ zur Funktion $\bar{S}_L(q,q')$ zusammenfassen. Dadurch erhält man

$$V_L(q,q') = \frac{F(q,q',\eta)}{2qq'} Q_L(\eta) + \bar{S}_L(q,q') \tag{4.72}$$

Nachdem nur der erste Summand singulär ist, wenden wir die Interpolationsmethode nur auf den ersten Summanden an. Außerdem ist es nur nötig, die Interpolationsmethode für $q,q' < \sqrt{4E/3}$ anzuwenden. Für alle anderen Impulse ist der Kern stetig. Dies ergibt für $q_i < \sqrt{4E/3}$

$$\bar{T}_L(q_i) = V_L(q_i) + \sum_{j=1}^{n} \left(I_{ij} F(q_i, q_j, \eta) + \bar{W}_j \bar{S}_L(q_i, q_j) \right) \Delta(q_j) \bar{T}_L(q_j)$$

$$+ \sum_{j=1}^{m} \tilde{W}_j V_L(q_i, \tilde{q}_j) \Delta(\tilde{q}_j) \bar{T}_L(\tilde{q}_j) \qquad (4.73)$$

mit

$$I_{ij} = \frac{1}{2q_i} \int_0^{\sqrt{4E/3}} dq' q' Q_L\left(\frac{E - q_i^2 - q'^2}{q_i q'}\right) H_j(q') \qquad (4.74)$$

Die Stützstellen q_i (i=1,...n) sind durch das Interpolationspolynom gegeben. In der Praxis erweist es sich als vorteilhaft, sie für $0 < q < a < \sqrt{4E/3}$ äquidistant zu wählen und für den Rest des Intervalls, für $a < q < \sqrt{4E/3}$, eine dichtere Verteilung zu wählen. Dies trägt dem Verhalten von $\bar{T}$ Rechnung und integriert auch im Dreinukleonenproblem den in der Nähe (aber im zweiten Blatt) liegenden Deuteron antiboundstate Pol am besten. Die Funktion $\bar{S}_L$ wird mit der zu den Stützstellen q_i gehörenden Simpsonregel integriert. Die Stützstellen und Gewichte $\tilde{W}_j$, $\tilde{q}_j$ werden gewonnen, indem man die Gaußintegrationsregel für ein endliches Intervall auf das Intervall $[\sqrt{4E/3}, \infty]$ transformiert.

Für $q_i > \sqrt{4E/3}$ entfällt in Gl. (4.73) der von der Interpolationsmethode herrührende Term, und wir haben einfach

$$\bar{T}_L(q_i) = V_L(q_i) + \sum_{j=1}^{n} \bar{W}_j V_L(q_i, q_j) \Delta(q_j) \bar{T}_L(q_j)$$

$$+ \sum_{j=1}^{m} \tilde{W}_j V_L(q_i, \tilde{q}_j) \Delta(\tilde{q}_j) \bar{T}_L(\tilde{q}_j) \qquad (4.75)$$

Die singulären Integrale (4.74) kann man auf verschiedene Weisen berechnen. Die primitivste Methode ist, das Intervall $[0, \sqrt{4E/3}]$ so in Teilintervalle zu zerlegen, daß die Endpunkte dieser Intervalle mit den logarithmischen Singularitäten zusammenfallen. In den Teilintervallen wendet man die Gauß-Legendre - Regel an. Da bei dieser Regel sich die Stützpunkte an den Intervallenden häufen, und das heißt nahe der Singularitäten, kann man so die

Singularitäten leicht ausschöpfen.

Höhere Genauigkeit erzielt man natürlich mit speziell für logarithmische Singularitäten geeigneten Integrationsregeln [63]. Sie sind aber nicht so leicht anzuwenden, da man sie für das bestimmte Integral

$$J = \int_0^1 d\xi \ln \xi \, f(\xi) \tag{4.76}$$

tabelliert findet. Bei der Transformation auf das tatsächlich vorliegende Integrationsintervall [0,a] mittels $\xi = ax$ kommt immer noch eine zweite Integration hinzu

$$J = a \int_0^{1/a} dx \ln x \, f(ax) + a \ln a \int_0^{1/a} f(ax)\, dx \tag{4.77}$$

die mit einer Standardregel ausgewertet werden muß.

Auch die Subtraktionstechnik kommt in Frage, nur muß man auch hier den Logarithmus explizit abspalten

$$J' = \int_0^c dx \ln x \,(f(x) - f(0)) + f(0)\, x(\ln x - 1)\Big|_0^c \tag{4.78}$$

Die eleganteste Methode scheint allerdings eine Variablentransformation zu sein, wodurch man die zwar endliche, aber unbegrenzte Fläche unter der zu integrierenden Kurve auf eine begrenzte Fläche abbildet [77].

$$\int_0^c g(x)\, dx = s \int_0^{c^{1/s}} g(t^s)\, t^{s-1}\, dt \tag{4.79}$$

Für $s > 1$ verschwindet der Integrand bei $t = 0$, auch wenn $g(0)$ dort singulär war. (Allerdings muß die Singularität dort schwächer sein als $t^{-\nu}$, $\nu < 1$.) Man beachte, daß bei logarithmischen Singularitäten die ν-te Ableitung bei $t = 0$ existiert, falls $\nu < s-1$ ist und $g(x)/\ln(x)$ so weit differenzierbar ist. Bei den folgenden Rechnungen wurde diese Methode verwendet, da sie eine explizite Abspaltung der Singularität unnötig macht.

Um die Interpolationsmethode zu testen, wurde die singuläre Integralgleichung (4.34) in O.QBA auch durch Integration im

Komplexen gelöst [75,78]. Das Yamaguchipotential hatte die Parameter

$$\beta = 5. \ , \quad \lambda = -34.865 \quad (\hbar = 2m = 1.)$$

Abb. 7 zeigt das Ergebnis und die auftretenden Differenzen. Wie man sieht, liegt die Genauigkeit bei 1 - 2 %.

Einen weiteren Test für die Genauigkeit der Interpolationsmethode liefert das optische Theorem. Die Differenz zwischen totalem und elastischem Wirkungsquerschnitt muß für jeden Wert des Gesamtdrehimpulses gleich sein dem totalen Aufbruchsquerschnitt. Letzterer ist durch ein vierdimensionales Integral über den differentiellen Aufbruchsquerschnitt gegeben [78].

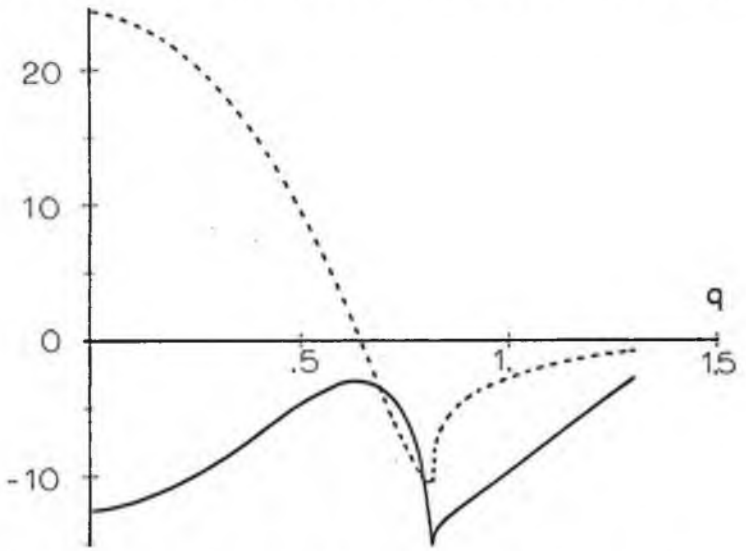


Abb. 7a) T-Matrix für S-Wellenstreuung im Dreibosonensystem bei einer Energie im Schwerpunktssystem von E = 1 ($\hbar$ = m = 1). Durchgezogene Kurve: Realteil; gestrichelte Kurve: Imaginärteil.

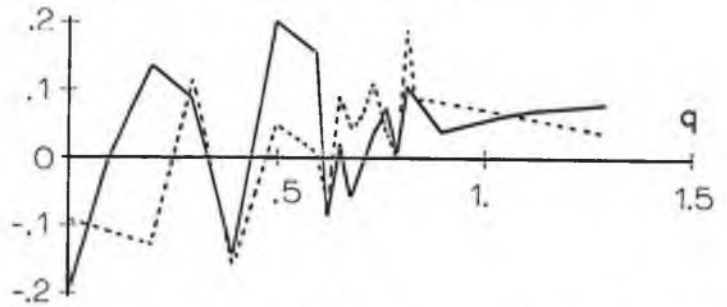


Abb. 7b) Die auftretenden Differenzen beim Vergleich der Lösung nach Methode 4.3.3 mit einer solchen nach 4.3.7

In Tabelle II ist das Ergebnis eines solchen Tests wiedergegeben. Wie man sieht, liegt die Genauigkeit, vom pathologisch kleinen Querschnitt für L = 1 abgesehen, bei 1 % oder besser.

Tabelle II Genauigkeitstest mit Hilfe des optischen Theorems für Gesamtenergie E = 5 ($\hbar = 2m = 1.$)

L	$\sigma^L_{tot.} - \sigma^L_{el.}$	$\sigma^L_{Aufbruch}$
0	0.2090	0.2082
1	0.0172	0.0199
2	0.4014	0.4023
3	0.1428	0.1427
4	0.0324	0.0318
5	0.00648	0.00642
6	0.001409	0.001409
7	0.000295	0.000294

Ein Vergleich mit Ergebnissen der Methode 4.3.4 (Lösung nach einmaliger Iteration) ist in Abb. 8 zu sehen. Die Übereinstimmung ist perfekt bis auf den Bereich $q \sim \sqrt{4E/3}$. In diesem Bereich muß sich die Lösung nach Brayshaw [58] verhalten wie

$$T(q) \sim \alpha + i\beta\sqrt{E - 3/4\,q^2} \quad , \; q < \sqrt{4E/3}$$
$$T(q) \sim \alpha + \beta\sqrt{3/4\,q^2 - E} \quad , \; q > \sqrt{4E/3} \; . \tag{4.80}$$

Daraus folgt für den Realteil von

$$\mathrm{Re}\,T(q) \sim \mathrm{Re}\,\alpha - \mathrm{Im}\,\beta\sqrt{E - 3/4\,q^2} \quad , \; q < \sqrt{4E/3} \tag{4.81}$$

$$\mathrm{Re}\,T(q) \sim \mathrm{Re}\,\alpha + \mathrm{Re}\,\beta\sqrt{3/4\,q^2 - E}\quad,\ q > \sqrt{4E/3}\,.$$

Für den Imaginärteil folgt

$$\begin{aligned} \mathrm{Im}\,T(q) &\sim \mathrm{Im}\,\alpha + \mathrm{Re}\,\beta\sqrt{E - 3/4\,q^2}\quad,\ q < \sqrt{4E/3} \\ \mathrm{Im}\,T(q) &\sim \mathrm{Im}\,\alpha + \mathrm{Im}\,\beta\sqrt{3/4\,q^2 - E}\quad,\ q > \sqrt{4E/3}\,. \end{aligned} \tag{4.82}$$

Wie man aus Abb. 8 ersieht, sind diese Bedingungen für unsere Lösung erfüllt: Unterhalb des Verzweigungspunktes hat der Realteil eine starke negative Steigung, die einer gleich starken positiven Steigung des Imaginärteils nach dem Verzweigungspunkt entspricht. Die Steigung des Imaginärteils unterhalb des Verzweigungspunktes sollte nach (4.82) der Steigung des Realteils oberhalb des Verzweigungspunktes entsprechen. Die Steigung der mit der Methode 4.3.4 gewonnenen Lösung hat unterhalb des Verzweigungspunktes das falsche Vorzeichen. Der Grund liegt darin, daß diese Methode keinen Wert für T am Verzweigungspunkt liefert und eine Interpolation über den Verzweigungspunkt hinweg schwierig ist, wenn man nicht die Integralgleichung selbst zur Interpolation benutzt oder die Kenntnis des analytischen Verhaltens von T verwendet.

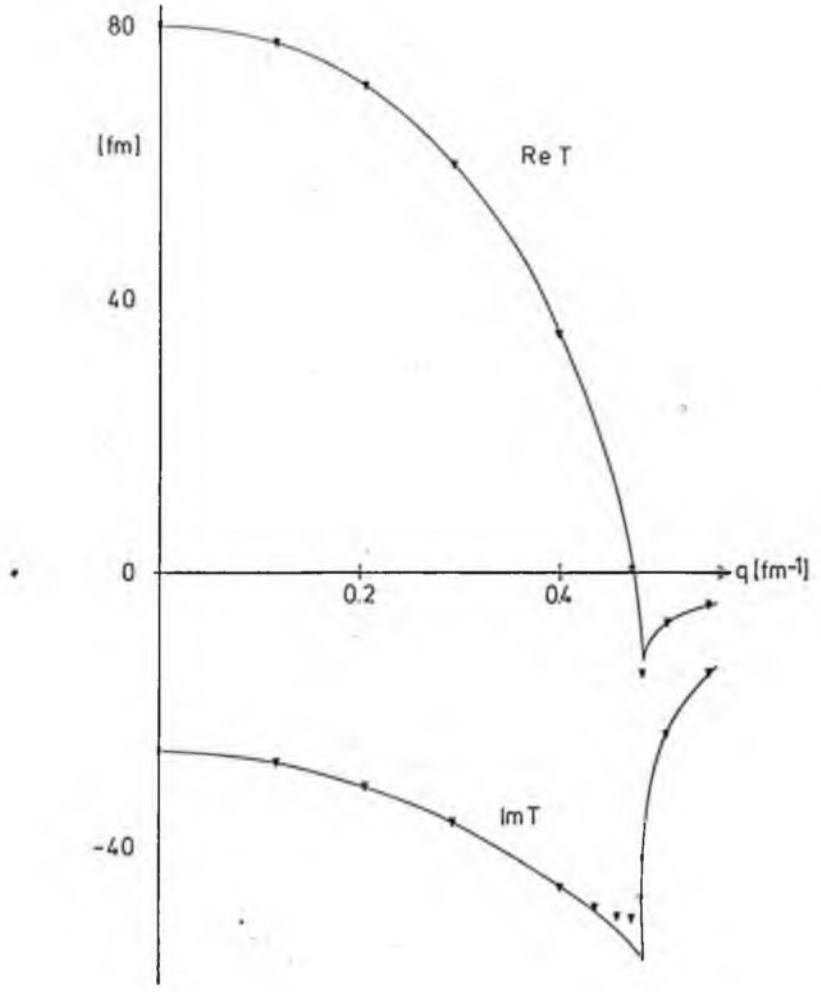


Abb. 8 Vergleich der mit verschiedenen Methoden gewonnenen T-Matrizen für ^4S Neutron-Deuteron Streuung bei 14.1 MeV Laborenergie. Durchgezogene Linie: Ergebnis von Fuda [69]; Dreiecke: Ergebnis der Interpolationsmethode.

5. Ergebnisse für das Dreibosonensystem

5.1 Elastischer Kanal

Die Lösung von Gl. (4.34) liefert über

$$T_L(q',q') = -\frac{3\pi}{2iq'}\left(\eta_L e^{2i\delta_L} - 1\right) \qquad (5.1)$$

den Realteil der Phasenverschiebung δ_L und den Inelastizitätsparameter η_L . Abb. 9 zeigt den Realteil der Phasenverschiebung für verschiedene Drehimpulse L für O. und 1.QBA.

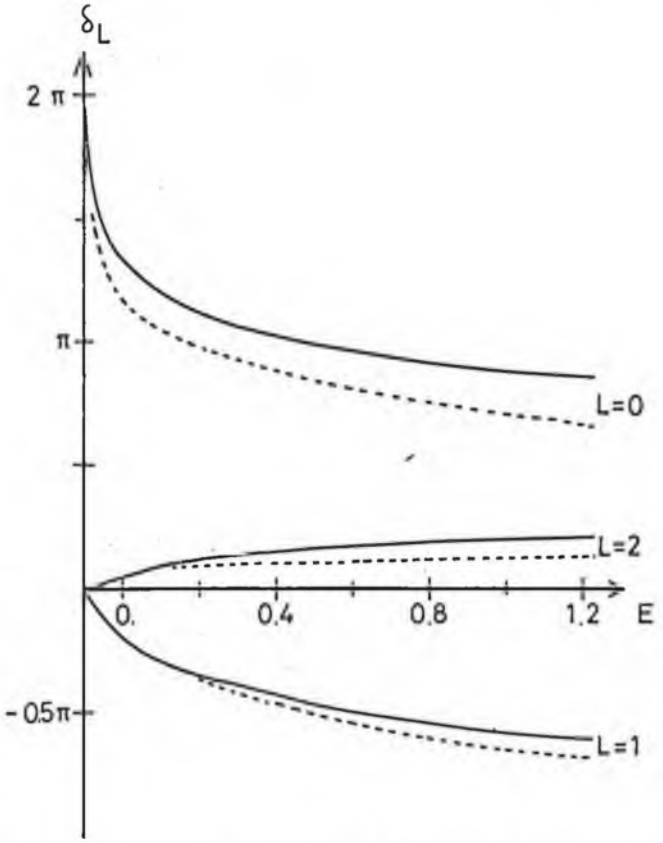


Abb. 9 Realteil der Phasenverschiebung in Abhängigkeit von der Gesamtenergie im Schwerpunktssystem (Einheiten: $\hbar = m = 1$). Gestrichelte Linie: O.QBA; durchgezogene Linie: 1.QBA.

Es fällt auf, daß die Phasen für gerades L positiv und für ungerades L negativ sind. Der Grund liegt darin, daß der Streumechanismus hauptsächlich durch den Austausch eines Teilchens

(Graph O in Abb. 5, S. 35) bestimmt wird. Das effektive Potential in O.QBA ist deshalb ein Austauschpotential, das für gerade Drehimpulse anziehend und für ungerade Drehimpulse abstoßend wirkt. Mathematisch kommt das durch das wechselnde Vorzeichen der Legendrefunktion in Gleichung (4.48) zum Ausdruck.

Würde zwischen Bindungszustand und freiem Teilchen kein Austauschpotential, sondern ein attraktives Yukawapotential wirken

$$V(\vec{q},\vec{q}) = \frac{g}{\mu^2 + (\vec{q}-\vec{q}')^2} \tag{5.2}$$

so erhielten wir für das effektive Potential in den verschiedenen Partialwellen

$$V_L(q,q') = \frac{g}{2}\int_{-1}^{1} \frac{P_L(\xi)\,d\xi}{\mu^2+q^2+q'^2-2qq'\xi} = \frac{g}{2qq'} Q_L\left(\frac{\mu^2+q^2+q'^2}{2qq'}\right) \tag{5.3}$$

d.h. man hätte in allen Partialwellen Attraktion. Geht man nun von der O.QBA zur 1.QBA über, so bekommt man tatsächlich solche Attraktionseffekte in allen Partialwellen durch die Berücksichtigung des Restpotentials, und dies bewirkt, daß die Phasen in 1.QBA höher liegen als in O.QBA.

Für das Dreibosonenproblem gibt es bisher nur wenige Rechnungen, so daß eine Aussage über die Güte der 1.QBA schwer ist. Unterhalb der Aufbruchsschwelle gibt es eine Rechnung von Tjon [70], die zeigt, daß die 1.QBA dem exakten Ergebnis sehr nahe kommt. Oberhalb der Aufbruchsrechnung gibt es nur[+)] eine Variationsrechnung von Schwager [34], bei der der Aufbruch unterdrückt wurde. Von ähnlichen Rechnungen für separables Potential [35] weiß man, daß die Genauigkeit im Realteil der Phase bei S-Wellenstreuung mindestens 1.5° beträgt, so daß man solche Rechnungen

---

[+)] Das heißt allerdings nicht, daß es keine Padérechnungen oberhalb der Aufbruchsschwelle gibt, siehe Ref. [8] !

praktisch als exakt ansehen kann.

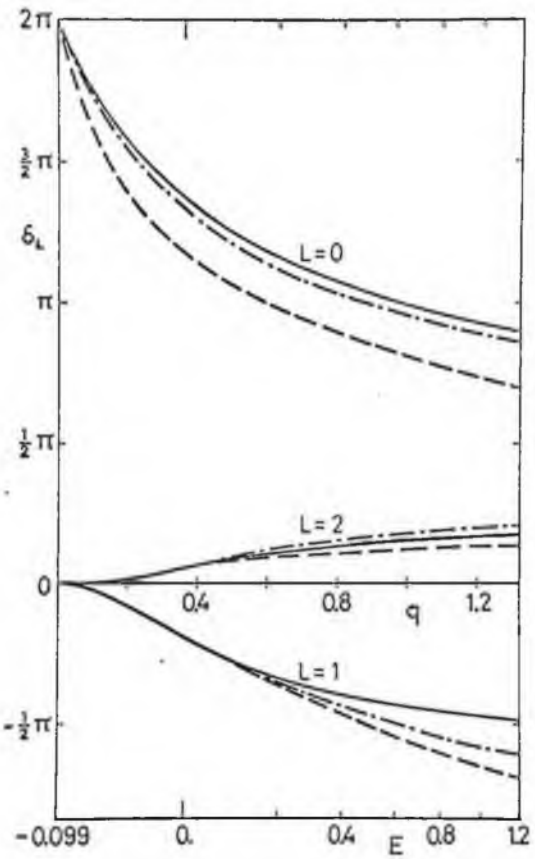


Abb. 10 Vergleich der mit verschiedenen Methoden gewonnenen Phasenverschiebungen. Gestrichelte Linie: O.QBA; strichpunktierte Linie: 1.QBA; durchgezogene Linie: Variationsrechnung von Schwager [34].

Der Vergleich mit der 1.QBA (siehe Abb. 10) zeigt nun, daß die 1.QBA Phase bei S-Wellenstreuung bis auf etwa 6° an das exakte Ergebnis herankommt. Dabei wird die exakte Kurve von unten angenähert. Bei P-Wellenstreuung ergeben sich bei höheren Energien größere Diskrepanzen. Eine Erklärung hierfür gibt es noch nicht. Es ist schwer einzusehen, daß die Differenz zwischen wahrer Lösung und 1.QBA größer sein soll als die Differenz zwischen 1.QBA und O.QBA.

Den totalen Aufbruchsquerschnitt in den verschiedenen Partialwellen erhält man aus der on-shell Lösung von Gl. (4.34) über das optische Theorem zu

$$\sigma^L = -4(2L+1)\left(\mathrm{Im}\,T_L/3q^1 + |T_L|^2/9\pi\right) \qquad (5.4)$$

Die so gewonnenen Wirkungsquerschnitte sind in Abb. 11 zu sehen.

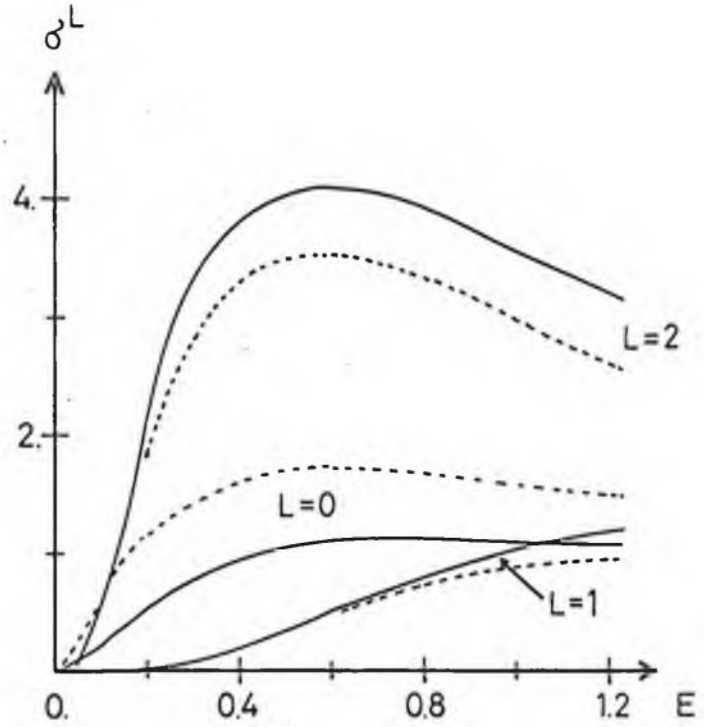


Abb. 11 Totaler Aufbruchsquerschnitt für verschiedene Drehimpulse in Abhängigkeit von der Gesamtenergie im Schwerpunktssystem (Einheiten: $\hbar = m = 1$). Gestrichelte Linie: O.QBA; durchgezogene Linie: 1.QBA.

Auch hier ist der Einfluß der nichtseparablen Anteile des Potentials beträchtlich. Der gesamte Aufbruchsquerschnitt (das ist die Summe über alle Partialwellen) ist dagegen ziemlich unempfindlich gegen solche Potentialdetails.

Der totale Aufbruchsquerschnitt für L = 0 ist in Abb. 12 nochmals gezeigt, im Vergleich mit dem Ergebnis von Schwager [37], das aus einer Wellenfunktion ohne Aufbruchskomponenten über die verallgemeinerte Katoidentität [36] berechnet wurde. Die

Diskrepanzen sind recht groß, und man kann im Augenblick noch nicht sagen, woher sie rühren.

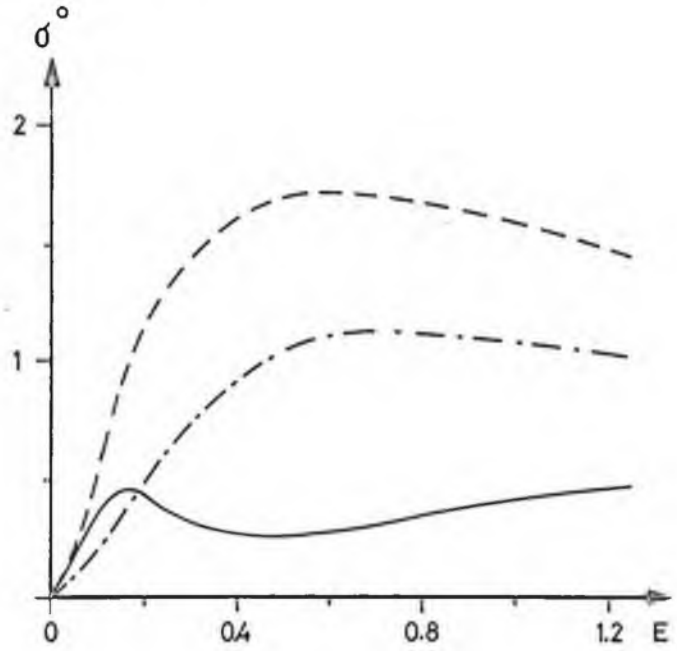


Abb. 12 Vergleich der mit verschiedenen Methoden gewonnenen Aufbruchsquerschnitte für Gesamtdrehimpuls L = 0. Gestrichelte Linie: 0.QBA; strichpunktierte Linie: 1.QBA; durchgezogene Linie: Variationsrechnung von Schwager [37].

5.2 Aufbruchskanal

Löst man die Quasiteilchengleichung (4.34) mit der Interpolationsmethode, so erhält man die Lösung $T_L(q,q')$ off-shell. Wie gegen Ende von Kapitel 2 ausgeführt wurde, ist in der off-shell Lösung sämtliche Information enthalten, die man zur Beschreibung des Aufbruchkanals braucht. Der Zusammenhang zwischen T und dem Aufbruchsoperator ist für unterscheidbare Teilchen durch Gl. (2.55) gegeben. Daraus erhält man den Aufbruchsoperator für das Dreibosonensystem durch Summation über die nicht unterscheidbaren Anfangszustände

$$\mathcal{T}(z) = \sqrt{2} \sum_{\alpha=1}^{3} \mathcal{T}_\alpha(z) \qquad (5.5)$$

Der Faktor $\sqrt{2}$ gibt die richtige Normierung [78].

Die typischen Prozesse, die in 1.QBA zum Aufbruch beitragen, sind in Abb. 13 graphisch wiedergegeben. Insgesamt ergeben sich infolge der Ununterscheidbarkeit der Teilchen 18 verschiedene Graphen.

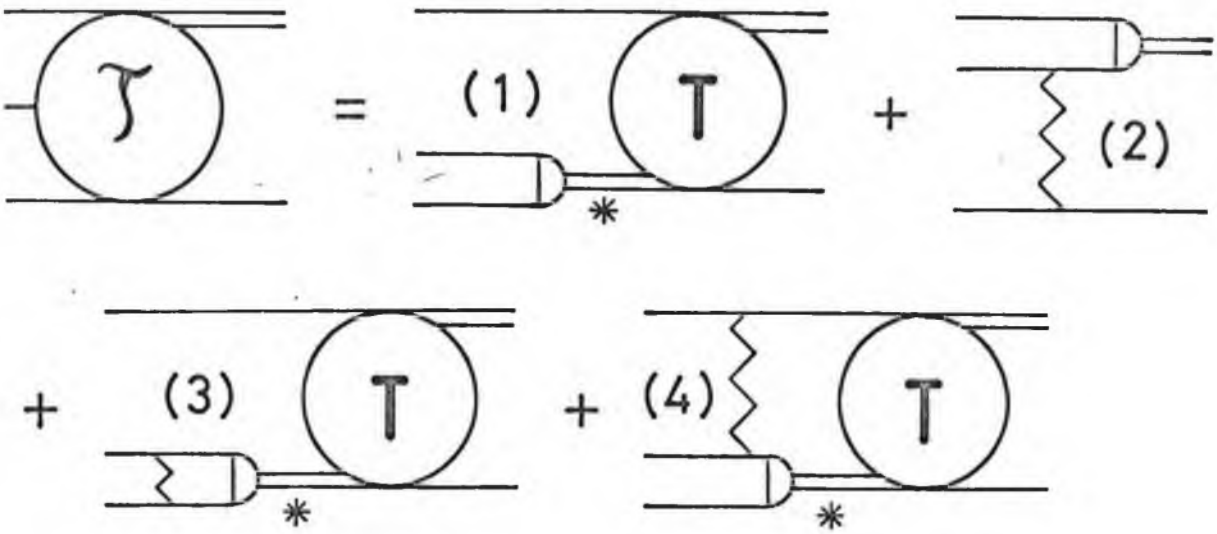


Abb. 13 Typische Graphen, die in 1.QBA zum Aufbruch beitragen. Das Restpotential ist hier durch eine Wellenlinie dargestellt.

Im einzelnen ist über vier verschiedene Typen folgendes zu sagen.

Typ 1: Dieser Graph entspricht dem separablen Modell. Die meisten Aufbruchsrechnungen sind bisher allein mit diesem Graphen durchgeführt worden. Er beschreibt die Streuung in einem Zustand positiver Energie (*) und ist im wesentlichen durch die off-shell Lösung $T(\vec{q},\vec{q}')$ gegeben, die wir im weiteren Produktionsamplitude nennen wollen, da sie zerfallsbereite Zustände produziert. In diesen

Zuständen ergibt sich für kleine Energien eine starke Endzustandswechselwirkung wegen des nahen Bindungszustandspoles im Propagator. Dies sollte sich nach dem Watson-Migdal-Modell [79] im Wirkungsquerschnitt durch ein ausgeprägtes Maximum für kleine Zweiteilchenrelativenergien zeigen.

Typ 2: Dieser Graph hat eine vom Spectatormodell [80] her bekannte Struktur. Es muß aber betont werden, daß dieser Graph nicht aus Modellvorstellungen folgt. Er ergibt sich vielmehr aus der exakten Quasiteilchentheorie als Korrekturgraph, in dem nur die Restwechselwirkung ausgetauscht wird. Der analytische Ausdruck für diesen Graphen lautet

$$\langle \vec{p}, \vec{q} | \mathcal{T}^{(2)} | \vec{q}' \rangle = \frac{\chi(\vec{q} + \vec{q}'/2)}{(\vec{q} + \vec{q}'/2)^2 + \frac{3}{4} q'^2 - E} V'(\vec{p}, \vec{q}' + \vec{q}/2) \qquad (5.6)$$

Wegen der on-shell Bedingung

$$E = \frac{3}{4} q'^2 + E^B \qquad (5.7)$$

ergibt sich

$$\begin{aligned} \langle \vec{p}, \vec{q} | \mathcal{T}^{(2)} | \vec{q}' \rangle &= \frac{\chi(\vec{q} + \vec{q}'/2)}{(\vec{q} + \vec{q}'/2)^2 - E^B} V'(\vec{p}, \vec{q}' + \vec{q}/2) \\ &= \hat{\psi}_B(\vec{q} + \vec{q}'/2)\, V'(\vec{p}, \vec{q}' + \vec{q}/2) \end{aligned} \qquad (5.8)$$

Der erste Faktor (die Wellenfunktion des Bindungszustandes im Subsystem in O.QBA) hat für

$$\vec{q} + \vec{q}'/2 = 0 \qquad (5.9)$$

ein Maximum. Dies entspricht der Situation, in der ein Teilchen des Bindungszustandes seinen ursprünglichen Impuls beibehalten hat. Man würde deshalb in diesem Fall einen maximalen Beitrag des Graphen $\mathcal{T}^{(2)}$ erwarten.

Ein entsprechendes Maximum zeigt die Inhomogenität der Quasiteilchengleichung, siehe Gl. (4.27). Nach dem

Spectatormodell ist zu erwarten, daß sich dieses Maximum auf die Lösung $T(\vec{q},\vec{q}')$ der Quasiteilchengleichung überträgt und sich deshalb auch in den Graphen zeigt, die die Produktionsamplitude T enthalten.

Typ 3: Dieser Typ entspricht dem Typ 1, nur daß durch den Austausch der Restwechselwirkung der Formfaktor geändert wird, was wiederum die Endzustandswechselwirkung modifiziert.

Typ 4: Dieser Typ entspricht ebenfalls dem Typ 1, nur gibt es hier durch Austausch der Restwechselwirkung einen Rescatteringeffekt. Die Auswirkung auf die Endzustandswechselwirkung ist im Vergleich zu Typ 3 genau umgekehrt. Attraktive Restwechselwirkung erhöht die Endzustandswechselwirkung im Typ 3 und vermindert sie im Typ 4.

Die analytische Auswertung von $\mathcal{T}^{(4)}$ führt auf

$$\langle \vec{p},\vec{q}|\mathcal{T}^{(4)}|\vec{q}'\rangle = \int \frac{d^3k\, T(\vec{k},\vec{q}')\Delta(k)\chi(\vec{q}+\vec{k}/2)V'(\vec{p},\vec{k}+\vec{q}/2)}{(\vec{k}+\vec{q}/2)^2+\frac{3}{4}q^2-E-i0} \qquad (5.10)$$

Die Auswertung dieses Integrals wird durch die Pole von Zwei- und Dreiteilchenpropagator erschwert. Es ist zwar möglich, mit Bipolarkoordinaten den Integranden so zu transformieren, daß die Pole nur in einer Variablen auftreten [81], dies hat jedoch den Nachteil, daß das Wurzelverhalten der Größen Δ und T bei $|k| = \sqrt{4E/3}$ bei der Integration nicht genügend berücksichtigt werden kann. Das Integral (5.10) wurde deshalb mit Hilfe der Subtraktionstechnik in der Variablen $\hat{k}\cdot\hat{q}$ stetig gemacht und die in der Variablen $|k|$ auftretenden logarithmischen Singularitäten mit Hilfe der Transformation (4.79) integriert. Über den Pol des Propagators Δ wurde ohne Subtraktion mit Hilfe eines Tricks von Mongan [61] und Sloan [62] hinweg integriert.

In den folgenden Abbildungen (Abb. 14-16) sind die berechneten differentiellen Aufbruchsquerschnitte (geteilt durch das Phasenraumvolumen) dargestellt. Aus der Vielzahl der möglichen Endkonfigurationen wurden eine kolineare, eine koplanare und eine aplanare Endkonfiguration der drei Teilchen relativ zum Anfangsimpuls $\vec{q}'$ des Systems Projektil-Target im Schwerpunktssystem ausgewählt.

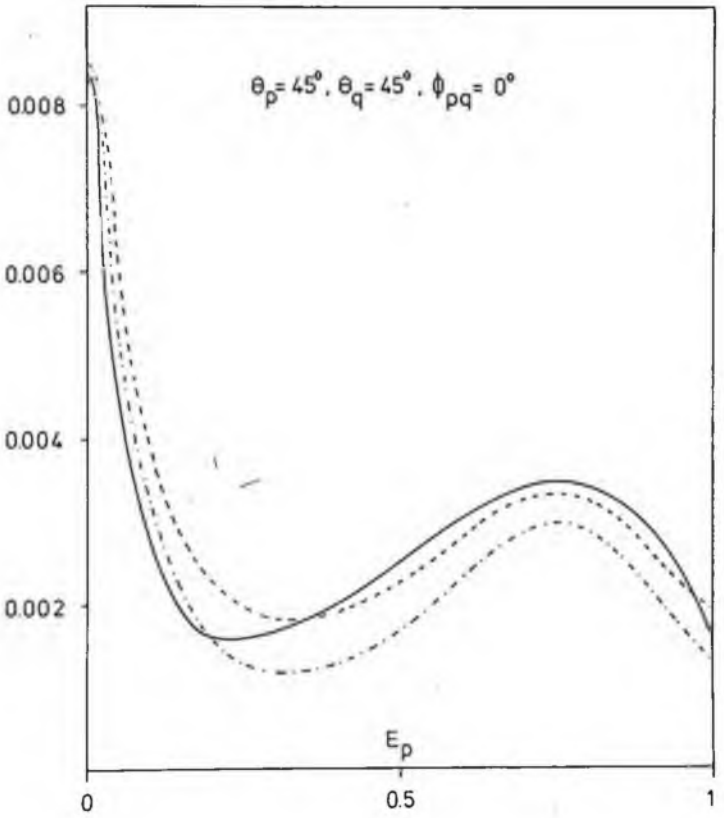


Abb. 14 Differentieller Aufbruchsquerschnitt (geteilt durch das Phasenraumvolumen) für Gesamtenergie im Schwerpunktssystem E = 1 ($\hbar$ = m = 1) für eine kolineare Endkonfiguration. Die Polarwinkel θ_p, θ_q und der Azimuthwinkel Φ_{pq} definieren die Lage des Relativimpulses $\vec{p}$ in einem Subsystem und den Impuls $\vec{q}$ des zugehörigen dritten Teilchens relativ zum Impuls des Projektils $\vec{q}'$. Durchgezogene Linie: 1.QBA; strichpunktierte Linie: 1.QBA ohne Graphen vom Typ 2; gestrichelte Linie: O.QBA.

Allgemein ist zu den Wirkungsquerschnitten folgendes zu sagen:

Da die Wirkungsquerschnitte in Abhängigkeit der Relativenergie $E_p = p^2$ in einem der Subsysteme aufgetragen sind, erwartet man für $E_p = 0$ einen final-state-interaction (FSI) - peak. Dieser peak ist für die kolineare Konfiguration gut ausgeprägt (Abb. 14). Für die anderen Konfigurationen ist er infolge konkurrierender Prozesse mehr oder weniger unterdrückt. Man muß bedenken, daß sich bei Bosonen infolge des Fehlens des $^1S_0$-antiboundstates des Zweinukleonensystems die FSI-peaks längst nicht so deutlich ausbilden können wie im Dreinukleonensystem.

Bei den anderen peaks handelt es sich der Reihe nach um folgende Prozesse:

Im kolinearen Fall tritt ein zweiter FSI-peak auf, da für diese Konfiguration für $E_p = 0.75$ in einem anderen Subsystem der Relativimpuls Null wird.

Im koplanaren Fall (Abb. 15) wurden die Winkel so gewählt, daß ein Teilchen des Bindungszustandes seine Flugrichtung beibehält.

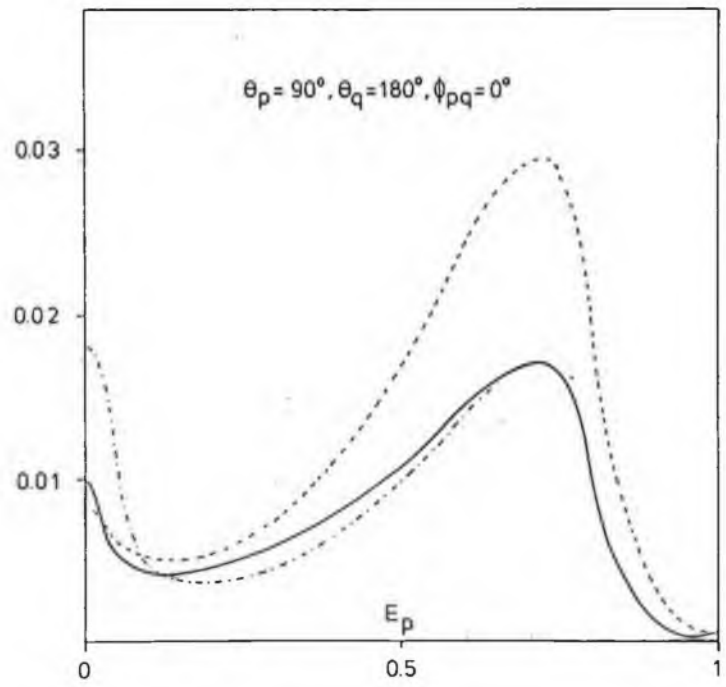


Abb. 15 Differentieller Aufbruchsquerschnitt (geteilt durch das Phasenraumvolumen) für eine koplanare Endkonfiguration. Definitionen und Einheiten siehe Abb. 14.

Für E_p = 0.725 entspricht der Endimpuls dieses Teilchens genau seinem Anfangsimpuls. Für diese Situation sagt das Spectatormodell ein Maximum voraus (siehe Gl. (5.9)).

Im aplanaren Fall (Abb. 16) wurden die Winkel so gewählt, daß die Erzeugungswinkel relativ zur Strahlrichtung für alle drei Teilchen gleich sind. Für E_p = 0.5 sind auch die Beträge aller drei Endimpulse gleich, so daß die Erzeugungssituation für alle drei Teilchen gleich ist. Aus diesem Grund addieren sich die drei Amplituden mit gleicher Phase zu einem hohen Betrag. (In einem Dreinukleonensystem würde man in diesem Punkt ein Minimum erhalten, da hier der dominierende Quartettanteil verschwindet.)

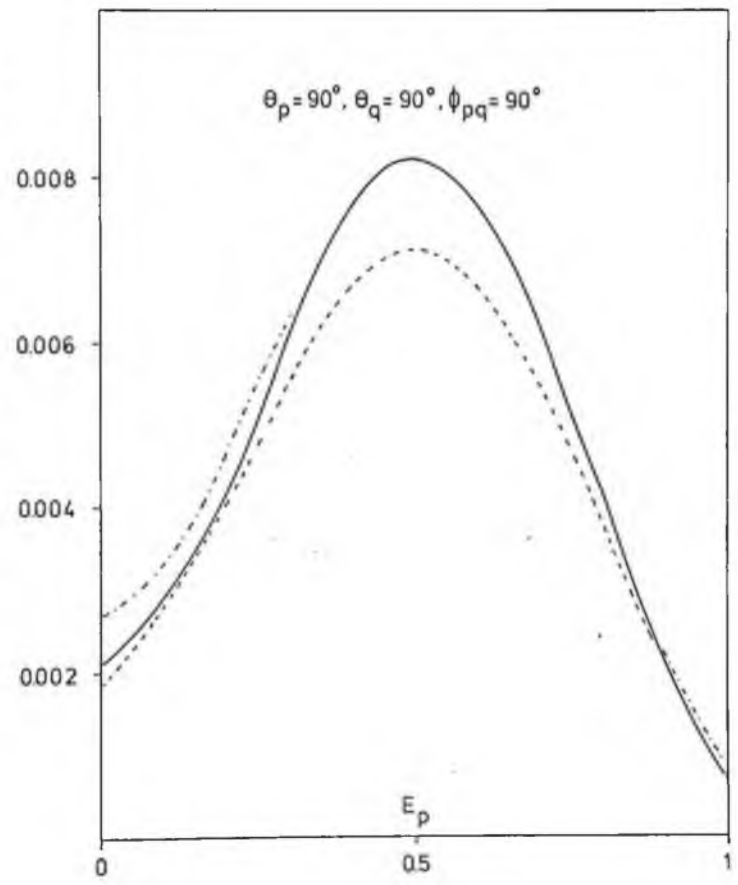


Abb. 16 Differentieller Aufbruchsquerschnitt (geteilt durch das Phasenraumvolumen) für eine aplanare Endkonfiguration. Definitionen und Einheiten siehe Abb. 14.

Der Beitrag der Korrekturgraphen vom Typ 2 ist aus der Differenz zwischen durchgezogener Linie und strichpunktierter Linie in den Abb. 14-16 zu entnehmen. Wie man sieht, ist der Einfluß dieser Graphen unter Umständen beträchtlich. Kurioserweise ist entgegen der Vorhersage von S. 61 der Einfluß im Spectatorpeak (Abb. 15, $E_p = 0.725$) gering. Das liegt daran, daß in den Graphen vom Typ 2 nur die Restwechselwirkung ausgetauscht wird, die als Differenz zwischen attraktivem lokalen und attraktivem separablen Potential je nach Konfiguration attraktiv oder repulsiv ist und in Zwischenbereichen (und dieser Fall liegt hier vor) sehr schwach ist.

Um ein Gefühl für die Wichtigkeit der Graphen vom Typ 3 und 4 zu erhalten, wird in den Abb. 17-19 gezeigt, wie sich an ausgewählten Punkten der Kurven von Abb. 14-16 die Beiträge der einzelnen Graphen in der Gaußschen Zahlenebene zum Aufbruchsoperator aufaddieren.

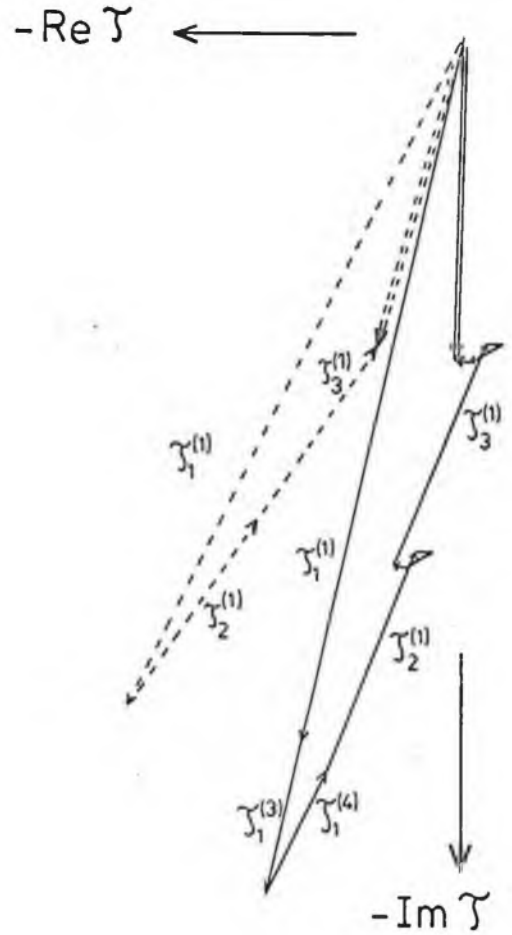


Abb. 17

Die Beiträge der einzelnen Graphen (einfache Linien) zum Aufbruchsoperator (Doppellinien). Die oberen Indizes geben den Typ des Graphen an (vgl. Abb. 13); die unteren Indizes kennzeichnen das jeweils ausgezeichnete Teilchen. Der Endzustand ist gegeben durch $\theta_p = 45^\circ$, $\theta_q = 45^\circ$, $\phi_{pq} = 0^\circ$, $E_p = 0$ (siehe Abb. 14).

Abb. 17 gibt die Verhältnisse im FSI-peak bei $E_p = 0$ von Abb.14 wieder. Die Numerierung der Teilchen ist so gewählt, daß die Teilchen 2 und 3 die Relativenergie $E_p = 0$ haben. Entsprechend sind die Beiträge $\tau_1^{(1)}$, $\tau_1^{(3)}$, $\tau_1^{(4)}$ besonders groß, da sich hier die starke Endzustandswechselwirkung von Teilchen 2 und 3 ausdrückt. In O. und 1. QBA erhält man hier nahezu identische Ergebnisse, weil sich die Korrekturen $\tau_1^{(3)}$ und $\tau_1^{(4)}$ fast aufheben. Dabei verstärkt der Graph 3 die Endzustandswechselwirkung, während Graph 4 sie wieder abschwächt. Dies entspricht der von Abb. 13 suggerierten Vorstellung: Austausch der Restwechselwirkung zwischen zwei Teilchen mit starker Endzustandswechselwirkung (Typ 3) erhöht die Aufenthaltswahrscheinlichkeit der beiden Teilchen beieinander, während der Austausch der Restwechselwirkung als Rescatteringeffekt (Typ 4) die Endzustandswechselwirkung stört und somit verringert.

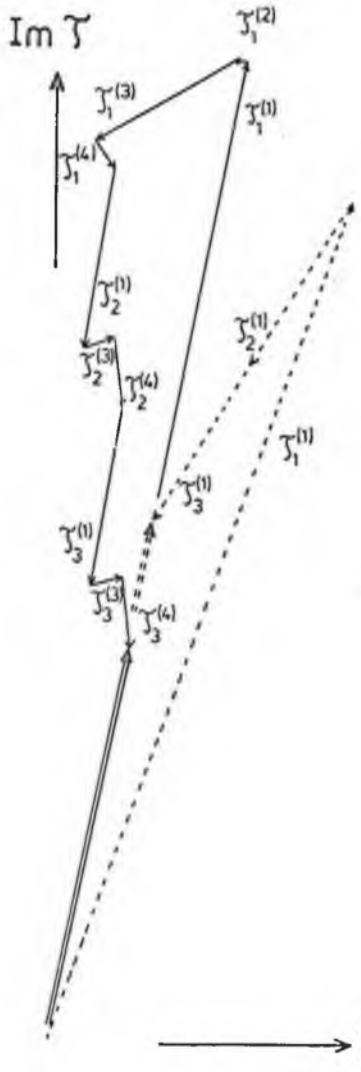


Abb. 18

Dasselbe wie Abb. 17. Der Endzustand ist hier gegeben durch $\theta_p = 90^\circ$, $\theta_q = 180^\circ$, $\Phi_{pq} = 0^\circ$, $E_p = 0.7$ (siehe Abb. 15).

Abb. 18 zeigt die Verhältnisse nahe des Spectatorpeaks von Abb. 15. Im Spectatorpeak hat (in der von uns gewählten Numerierung) das Teilchen 1 (das vor der Streuung gebunden war) seinen ursprünglichen Impuls beibehalten, was nach S.62 eine besonders große Produktionsamplitude $T(\vec{q}, \vec{q}')$ geben soll. Dies überträgt sich auch auf den Aufbruchsoperator $\mathcal{T}$, und zwar ist dieser Effekt, wie Abb. 18 zeigt, in 1.QBA noch größer als in O.QBA. Trotzdem ergibt sich in 1.QBA ein kleinerer Aufbruchsquerschnitt, da die Phasenlage der Korrekturgraphen $\mathcal{T}^{(3)}$, $\mathcal{T}^{(4)}$ derart ist, daß sie (zusammen mit $\mathcal{T}_2^{(1)}$ und $\mathcal{T}_3^{(1)}$) den hohen Beitrag von $\mathcal{T}_1^{(1)}$ reduzieren.

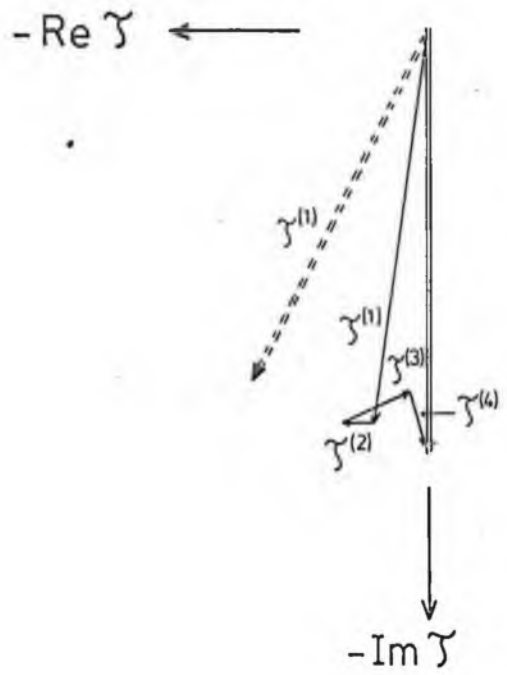


Abb. 19

Dasselbe wie Abb. 17. Der Endzustand ist hier gegeben durch $\theta_p = 90^\circ$, $\theta_q = 90^\circ$, $\Phi_{pq} = 90^\circ$, $E_p = 0.5$ (siehe Abb. 16). Da die Entstehungsbedingungen für alle drei Teilchen gleich sind, ist hier die Teilchenindizierung weggelassen.

Abb. 19 zeigt die Verhältnisse im Maximum des Wirkungsquerschnittes von Abb. 16. Die Produktionsamplituden in O. und 1. QBA sind hier etwa gleich groß und somit auch die Beiträge von $\mathcal{T}^{(1)}$. Die Phasenlage der Spectatorkorrektur $\mathcal{T}^{(2)}$ ist derart, daß kein Beitrag zum Wirkungsquerschnitt erfolgt. Lediglich $\mathcal{T}^{(3)}$ und $\mathcal{T}^{(4)}$ geben einen kleinen Beitrag, was im Wirkungsquerschnitt deutlich zu sehen, da ja vom Aufbruchsoperator das Absolutquadrat gebildet wird.

Man könnte sich eine vereinfachte Quasiteilchenaufbruchsrechnung vorstellen, bei der man die Produktionsamplitude T nur in O.QBA berechnet und die nichtseparablen Anteile des Potentials allein über die Korrekturgraphen im Aufbruchsoperator (Abb. 13) berücksichtigt. Dies führt aber bei dem hier untersuchten Beispiel zu keinen sinnvollen Ergebnissen, da die Produktionsamplituden in O. und 1. QBA zu verschieden ausfallen, wie man aus Abb. 17-19 entnehmen kann (die Beiträge $T^{(1)}$ sind den Produktionsamplituden T direkt proportional). Selbst in Abb. 19, wo die Beträge von $T^{(1)}$ in beiden Näherungen nahezu gleich sind, erhält man wegen der unterschiedlichen Phasenlage unterschiedliche Ergebnisse.

Die hier vorgeführten Rechnungen zeigen, wie man die Aufbruchsreaktion für nichtseparables Potential behandeln kann, ohne die Faddeev Gleichungen selbst lösen zu müssen.

Ein gewisser Nachteil der hier verwendeten Quasiteilchenmethode scheint zu sein, daß man bei gegebenem Potential erst eine geeignete Zerlegung in separablen Anteil und einen genügend schwachen Rest finden muß (vgl. Gl. (2.40)), was nicht für jedes Potential so einfach sein muß wie in unserem Fall. Die Mühe, eine passende Zerlegung des Potentials zu finden, lohnt sich aber. Durch den Vergleich von O. und 1. QBA erhält man ein Gefühl dafür, welche Anteile des Potentials wichtig sind und welche nicht. In dem von uns untersuchten Beispiel eines rein attraktiven Potentials ergab sich, daß nichtseparable Anteile eine große Rolle spielen. Dies ist, wie wir im nächsten Kapitel sehen werden, bei den realistischeren soft-core Potentialen nicht der Fall.

Ein weiterer Nachteil der Quasiteilchenmethode, so wie sie hier verwendet wurde, scheint zu sein, daß man nach Lösen der Quasiteilchengleichung nicht direkt den Aufbruchsoperator erhält, sondern noch den Umweg über Gl. (2.55) gehen muß. Dies läßt sich vermeiden, wenn man die Quasiteilchenmethode direkt auf die Alt-Grassberger-Sandhas Gleichungen für die Aufbruchsoperatoren anwendet (Gl. 2.32).

6. Ergebnisse für das Dreinukleonensystem (elastische Streuung oberhalb der Aufbruchsschwelle)

Die Quasiteilchenrechnungen am Dreibosonensystem (siehe Kap. 5) sollen hier durch einige realistische Rechnungen ergänzt werden. "Realistisch" soll dabei heißen, daß wir nun die Spinabhängigkeit der Kernkräfte berücksichtigen und uns nicht nur auf rein attraktive Potentiale beschränken.

6.1 Die Quasiteilchengleichungen für das Dreinukleonensystem bei zentraler Wechselwirkung

Die Quasiteilchengleichungen (2.52) sind im allgemeinen Fall ein gekoppeltes System von Integralgleichungen vom Lippmann-Schwinger Typ für T-Matrizen, die den Übergang vom gegebenen Anfangszustand zu den möglichen Endzuständen beschreiben. Es ist leicht einzusehen, wie es mit der Kopplung der Quasiteilchengleichung bei zentraler Wechselwirkung bestellt ist. Wir nehmen dabei an, daß das vorgegebene Zweinukleonenpotential in jedem der beiden Spinzustände in einen separablen Anteil und in einen Rest zerlegt werden kann, derart, daß der Rest als Störung behandelbar ist

$$V = \sum_{i=1}^{2} v_i P_i = \sum_{i=1}^{2} |x_i\rangle \lambda_i \langle x_i| P_i + \sum_{i=1}^{2} v_i' P_i \qquad (6.1)$$

Dabei sind die P_i die Projektoren auf die beiden möglichen Spinzustände (i = 1 Triplett-, i = 2 Singulettzustand).

Bei zentraler Wechselwirkung sind Gesamtbahndrehimpuls L und Gesamtspin S Erhaltungsgrößen. Der Gesamtspin kann die Werte 1/2 und 3/2 annehmen.

Bei Quartettstreuung (S = 3/2) ist im Endzustand nur ein Deuteron (d) möglich, entsprechend gibt es nur eine T-Matrix $T_{dd}^{3/2}$ die die Streuung beschreibt und die Quasiteilchengleichung ist wie im Dreibosonenfall eine ungekoppelte Integralgleichung (siehe Abb. 20).

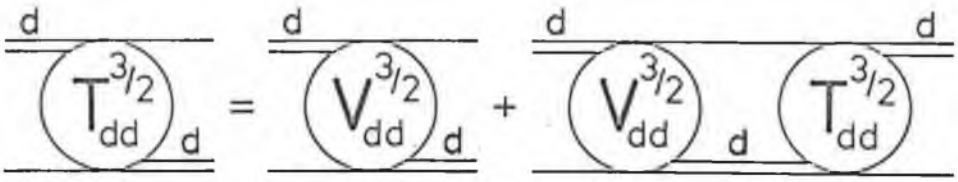


Abb. 20 Die Quasiteilchengleichungen für Quartettstreuung

Bei Doublettstreuung (S = 1/2) ist im Endzustand nicht nur ein Deuteron möglich, sondern auch ein Nukleonenpaar im (ungebundenen) Singulettzustand (ϕ), entsprechend gibt es zwei T-Matrizen, die die Streuung aus dem vorgegebenen Anfangszustand in die beiden möglichen Endzustände beschreiben, $T^{1/2}_{dd}$ und $T^{1/2}_{\phi d}$. Die Quasiteilchengleichungen sind nun gekoppelt (siehe Abb. 21).

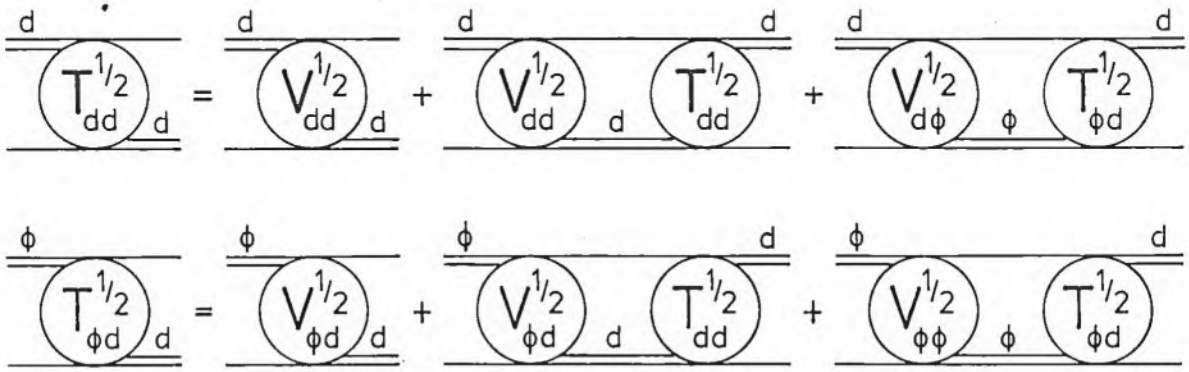


Abb. 21 Die Quasiteilchengleichungen für Doublettstreuung

Allgemein können wir schreiben, wenn wir für das Deuteron den Index 1 setzen und für den Singulettzustand den Index 2,

$$T^S_{k1} = V^S_{k1} + \sum_{\ell=1}^{N^S} V^S_{k\ell}\,\Delta_\ell\,T^S_{\ell 1} \qquad (6.2)$$

$$N^{3/2} = 1\,,\quad N^{1/2} = 2\,,\quad k = 1,2\,.$$

Dabei ist Δ_1 der Propagator der freien Bewegung des Deuterons relativ zum dritten Nukleon und Δ_2 entsprechend der Propagator der freien Bewegung des Singulettzustandes relativ zum dritten

Nukleon. Die auftretenden effektiven Potentiale $V_{k\ell}^{S}$ sind für die 1.QBA in Abb. 22 wiedergegeben.

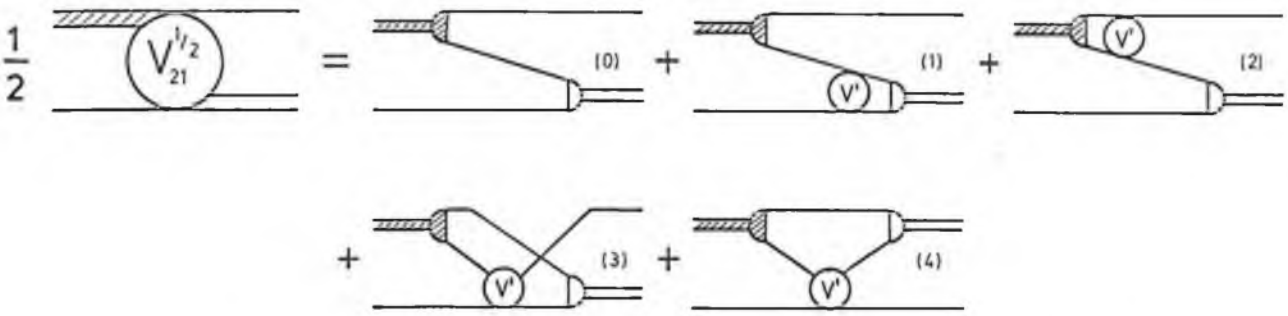


Abb. 22 Das effektive Potential in 1.QBA. Die Wellenlinien stellen das Restpotential, die Halbkreise die Formfaktoren des separablen Potentials dar. Singulettzustände sind gegenüber Triplettzuständen durch Schraffur hervorgehoben.

Über die Spinabhängigkeit des effektiven Potentials kann man aus Abb. 22 folgendes ablesen: Das Restpotential ist ebenso wie das zugrunde liegende lokale Potential und das zur Approximation benützte separable Potential spinabhängig (siehe Gl. (6.1)). In den Graphen 1 und 2 bewirkt das Auftreten des Restpotentials nur eine Modifikation des Formfaktors, und je nach den Projektionseigenschaften des Formfaktors wird der Singulett- oder der Triplettanteil des Potentials ausgeblendet. Die Spinabhängigkeit der drei Potentiale $V_{k\ell}^{S}(0,1,2)$ ist demnach gleich und tritt als Faktor auf, der allen drei Potentialen gemeinsam ist.

$$V_{k\ell}^{S}(0,1,2) = \eta_{k\ell}^{S}\, V_{k\ell}(0,1,2) \qquad (6.3)$$

Der Spinfaktor η ergibt sich zu [82]

$$\eta^{1/2} = \begin{pmatrix} 1/4 & 3/4 \\ 3/4 & 1/4 \end{pmatrix} \qquad \eta^{3/2} = \begin{pmatrix} -1/2 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \qquad (6.4)$$

Das verbleibende spinunabhängige Potential entspricht dem vom Dreibosonenfall her bekannten Potential. Die Indizes geben nur noch an, welche Parameter für die Formfaktoren zu wählen sind. Die Paulirepulsion im Quartettfall kommt in negativen Vorzeichen von $\eta_{11}^{3/2}$ zum Ausdruck. Das hat zur Folge, daß das effektive Potential $V_{11}^{3/2}$ immer dann abstoßend wirkt, wenn im Dreibosonenfall Anziehung vorliegt und umgekehrt.

Etwas komplizierter ist die Spinabhängigkeit bei den beiden Graphen $V^S_{(3,4)}$; da hier Formfaktoren und Restpotential in verschiedenen Subsystemen wirken, wird kein definierter Spinanteil des Restpotentials ausgeblendet, und die Summe von Gl. (6.1) bleibt erhalten

$$V^S_{k\ell}(3,4) = \sum_{i=1}^{2} \zeta_{k\ell i} V_{k\ell i}(3,4) \qquad (6.5)$$

$V_{k\ell 1}^{(3)}$ ist dann z.B. der Graph 3 mit einem Austausch der Triplettrestwechselwirkung. Der Spinfaktor ζ ergibt sich zu [83]

$$\zeta_1^{1/2} = \begin{pmatrix} 1/16 & -3/16 \\ -3/16 & 9/16 \end{pmatrix} \quad \zeta_1^{3/2} = \begin{pmatrix} 1/4 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\zeta_2^{1/2} = \begin{pmatrix} 9/16 & -3/16 \\ -3/16 & 1/16 \end{pmatrix} \quad \zeta_2^{3/2} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \qquad (6.6)$$

Aus der Kopplung des Gleichungssystems (6.2) und der in Gl. (6.5) auftretenden Summe ergibt sich, daß der Rechenaufwand bei der Behandlung des Dreinukleonensystems im Doublettzustand um einen Faktor 8 größer ist als bei der Behandlung des Dreibosonensystems. Wir werden uns deshalb auf die elastische n-d Streuung oberhalb

der Aufbruchsschwelle beschränken. Dieses Problem enthält bereits die ganze Schwierigkeit der Randbedingungen (die sich in der analytischen Struktur des Kerns äußert), bringt aber dennoch einige rechentechnische Vereinfachungen:

Der elastische Wirkungsquerschnitt ergibt sich aus

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = \frac{1}{27\pi^2}\left(|T_{11}^{1/2}(\vec{q},\vec{q}')|^2 + 2|T_{11}^{3/2}(\vec{q},\vec{q}')|^2\right) \tag{6.7}$$

$$|\vec{q}|, |\vec{q}'| = \sqrt{\tfrac{4}{3}(E - E^d)}$$

d.h., die Absolutquadrate von T_{11}^S (on-shell) ergeben direkt den differentiellen Wirkungsquerschnitt, da T^S für die elastische Streuung bereits die vollsymmetrisierte Amplitude darstellt. Für den differentiellen Aufbruchsquerschnitt muß man jedoch (abgesehen von der in Abschnitt 5.2 beschriebenen Berechnung des Aufbruchsoperators aus $T_{i1}^S(\vec{q},\vec{q}')$) zur Symmetrisierung eine kohärente Summe über die Endzustände ausführen, was einen Gesamtgenauigkeitsverlust mit sich bringt. Man muß deshalb die Konvergenz der vier Funktionen $T_{i1}^S(\vec{q},\vec{q}')$ für alle $|\vec{q}|$ studieren, während für elastische Streuung die Konvergenz der beiden Zahlen $T_{i1}^S(\vec{q},\vec{q}')$ genügt.

6.2 Ergebnisse für das Dreinukleonensystem mit Yukawawechselwirkung

Für rein attraktives Yukawapotential gibt es bisher nur eine Rechnung für S-Zustände. Diese wurde von McDonald und Nuttall [41] mit der Methode komplexer Koordinaten durchgeführt. Das zugrunde gelegte Potential hatte die in Tabelle III wiedergegebenen Parameter. Die dazugehörenden Niederenergiedaten finden sich in Tabelle IV.

Für eine Dreinukleonenrechnung mit der Quasiteilchenmethode muß das gegebene Potential in einen separablen Anteil (mit Yamaguchiformfaktor) und einen möglichst schwachen Restterm zerlegt werden (siehe Gl. (6.1)). Die Parameter des Yamaguchipotentials

Tabelle III Parameter des von McDonald und Nuttall [41] verwendeten Yukawapotentials
$\hbar^2/m = 41.46$ MeV F^2

Spinzustand	Potentialtiefe g [F^{-1}]	Abfallparameter μ [F^{-1}]
Triplett	- 1.702	0.7092
Singulett	- 1.364	0.8658

Tabelle IV Niederenergie Parameter des in Tab. III angegebenen Yukawapotentials

Deuteronbindungsenergie	2.226	MeV
Triplett-s Streulänge	5.41	F
Singulett-s Streulänge	- 23.78	F
Singulett-s effektive Reichweite	2.70	F

Tabelle V Parameter des zur Quasiteilchenrechnung verwendeten Yamaguchipotentials

Spinzustand	Potentialtiefe λ [F^{-3}]	Abfallparameter β [F^{-1}]
Triplett	- 0.34643	1.3561
Singulett	- 0.20720	1.2987

wurden über ein Variationsverfahren [51] so bestimmt, daß das Yamaguchipotential im Triplettzustand dieselbe Bindungsenergie und (fast) dieselbe Wellenfunktion wie das Yukawapotential liefert. Im Singulettfall wurden die Parameter so gewählt, daß das Yamaguchipotential bei der Energie E = 0 fast dieselbe Eigenfunktion für die homogene Lippmann-Schwinger Gleichung liefert wie das Yukawapotential. Die so gewonnenen Parameter sind in Tabelle V wiedergegeben. Man könnte auch Yamaguchipotentiale konstruieren, die dieselben Niederenergiedaten haben, wie in Tabelle IV wiedergegeben, doch wäre hierzu noch eine Überprüfung dieser von McDonald und Nuttall angegebenen Daten nötig. Das hier gewählte Verfahren scheint uns direkter und sicherer.

Die gewonnenen Ergebnisse sind in Abb. 23 wiedergegeben. Da McDonald und Nuttall [41] in ihrer Untersuchung herausgefunden hatten, daß die Ergebnisse in S-Zustand unabhängig davon sind, ob eine Serber- oder eine Wignerkraft verwendet wurde, haben wir uns auf die für die Quasiteilchenmethode leichter zu verarbeitende Wignerkraft beschränkt. Die Abweichungen im Realteil der Doublett S-Phase zwischen der McDonald-Nuttall Rechnung und der 1.QBA betragen maximal 7°. Dies entspricht etwa den Abweichungen, die Schwager [34] im Dreibosonensystem gefunden hat. Es ist ja zu erwarten, daß die 1.QBA nicht ganz das exakte Resultat liefern kann, wenn sich die O.QBA so stark von der 1.QBA unterscheidet. Es zeigt sich schon bei der Rechnung von Tritonbindungsenergie und Doublettstreulänge [51,83], daß die 1.QBA bei rein attraktivem Potential die volle Attraktivität nicht ausschöpft. Entsprechend nähert sich ${}^2\delta_0$ (1.QBA) von unten dem exakten Wert (dies gilt natürlich in verstärktem Maß für ${}^2\delta_0$ (O.QBA) - wir werden dies im nächsten Abschnitt noch eingehender diskutieren).

Bei der Berechnung des Inelastizitätsparameters für die Doublett S-Streuung ergibt sich für nicht zu hohe Energien eine gute Übereinstimmung zwischen 1.QBA und McDonald-Nuttall. Bei höheren Energien gibt es aber deutliche Diskrepanzen. Hier erscheint uns das McDonald-Nuttallsche Ergebnis zu hoch, während sich die 1.QBA und insbesondere die Überschneidung von ${}^2\eta_0$ (O.QBA) und

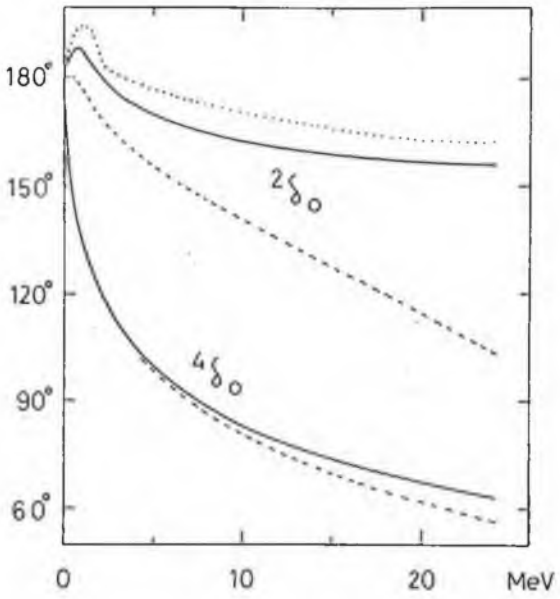


Abb. 23a) Realteil der Phasenverschiebung in der S-Welle in Abhängigkeit von der Neutronenenergie im Laborsystem. Durchgezogene Linien: 1.QBA; gestrichelte Linien: 0.QBA; gepunktete Linien: McDonald und Nuttall [41].

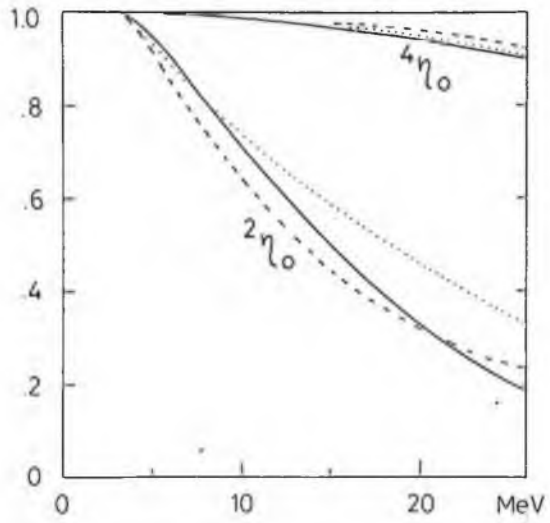


Abb. 23b) Inelastizitätsparameter in der S-Welle in Abhängigkeit von der Neutronenenergie im Laborsystem. Durchgezogene Linien: 1.QBA; gestrichelte Linien: 0.QBA; gepunktete Linien: McDonald und Nuttall [41].

$^2\eta_o$ (1.QBA) bei ca. 20 MeV Laborenergie gut in eine in Abschnitt 6.5 noch zu besprechende Regel einpassen.

Für die Quartett S-Streuung gibt sich für alle Energien eine gute Übereinstimmung zwischen McDonald-Nuttall und Quasiteilchenmethode. Dies ist wegen der geringen Sensitivität (infolge der Paulirepulsion) nicht verwunderlich. Die geringe Sensitivität dokumentiert sich schon in den kleinen Unterschieden zwischen O. und 1. QBA.

Leider liegen von Nuttall keine Rechnungen für höhere Partialwellen der n-d Streuung vor - speziell ein Vergleich für die ^{4}P-Welle, die den elastischen Wirkungsquerschnitt entscheidend beeinflußt, wäre von Interesse.

Wir wenden uns deshalb einem etwas anderen spinabhängigen Yukawapotential zu - dem Malfliet-Tjon Potential II - IV [84]. Für dieses Potential liegen unterhalb der Aufbruchsschwelle elastische Wirkungsquerschnitte von Alt [51,83] vor. Die für dieses Potential interessierenden Größen sind in den Tabellen VI - VIII zusammengestellt. Die mit der Quasiteilchenmethode berechneten Phasen und Inelastizitätsparameter sind in Abb. 24 in O. und 1.QBA wiedergegeben. Unterhalb der Aufbruchsschwelle wurde gute Übereinstimmung mit den Altschen Ergebnissen [51,83] erzielt.

Zur Berechnung von elastischen Wirkungsquerschnitten wurden die Quasiteilchengleichungen für Gesamtdrehimpuls L = 0, 1 und 2 exakt gelöst. Für Drehimpuls L = 3, 4 ... 9 wurde die 1. Iteration der Quasiteilchengleichung benützt. Alle höheren Drehimpulse wurden in Bornscher Näherung berücksichtigt, allerdings nur durch Graph O von Abb. 22. Die Ergebnisse sind in Abb. 25 dargestellt. Es zeigt sich, daß die 1.QBA einen höheren Vorwärts- und Rückwärtspeak liefert als die O.QBA. Dadurch wird die Übereinstimmung zwischen Theorie und Experiment wesentlich verbessert (speziell bei 14.1 MeV; bei den anderen Energien ist die Vorwärtsrichtung nicht genügend ausgemessen). Es ist interessant zu untersuchen, woher diese Verbesserung im einzelnen kommt: Neben der ^{2}S-Welle zeigt sich auch die ^{4}P-Welle als empfindlich gegen Potentialdetails. Der Quartettkanal ist nämlich nicht

Tabelle VI Parameter des Malfliet-Tjon Potentials [84]

Spinzustand	Potentialtiefe g [F^{-1}]	Abfallparameter μ [F^{-1}]
Triplett	- 1.575	0.633
Singulett	- 1.265	0.809

Tabelle VII Niederenergie Parameter des Malfliet-Tjon Potentials [84]

Deuteronbindungsenergie	2.23 MeV
Triplett-s Streulänge	5.45 F
Singulett-s Streulänge	- 23.3 F
Singulett-s effektive Reichweite	2.8 F

Tabelle VIII Parameter des zur Quasiteilchenrechnung verwendeten Yamaguchipotentials

Spinzustand	Potentialtiefe λ [F^{-3}]	Abfallparameter β [F^{-1}]
Triplett	- 0.27358	1.2417
Singulett	- 0.16777	1.2135

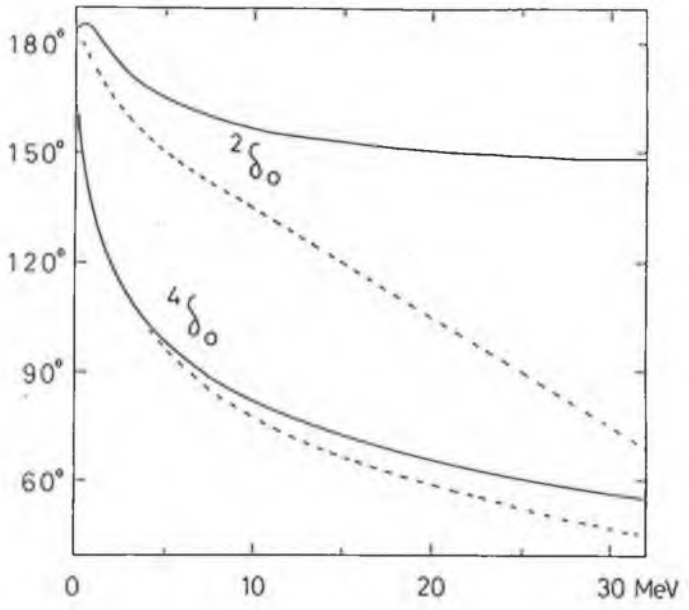


Abb. 24a) Realteil der Phasenverschiebung in der S-Welle für das Malfliet-Tjon Potential II-IV in Abhängigkeit von der Neutronenenergie im Laborsystem. Durchgezogene Linien: 1.QBA; gestrichelte Linien: O.QBA.

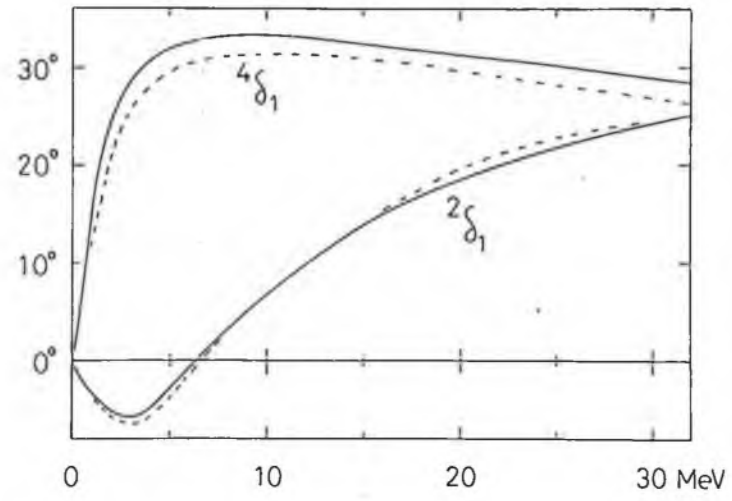


Abb. 24b) Realteil der Phasenverschiebung in der P-Welle für das Malfliet-Tjon Potential II-IV in Abhängigkeit von der Neutronenenergie im Laborsystem. Durchgezogene Linien: 1.QBA; gestrichelte Linien: O.QBA.

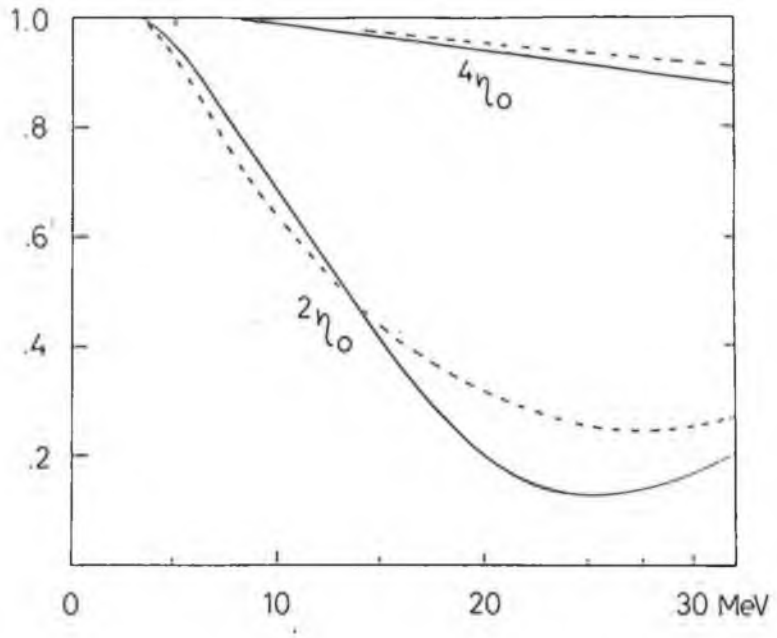


Abb. 24c) Inelastizitätsparameter in der S-Welle für das Malfliet-Tjon Potential II-IV in Abhängigkeit von der Neutronenenergie im Laborsystem.
Durchgezogene Linien: 1.QBA; gestrichelte Linien: O.QBA.

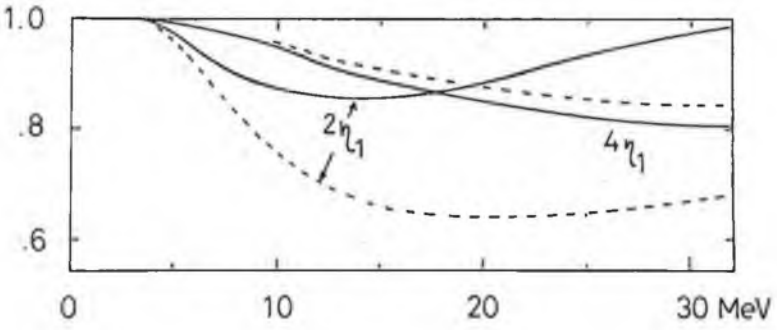


Abb. 24d) Inelastizitätsparameter in der P-Welle für das Malfliet-Tjon Potential II-IV in Abhängigkeit von der Neutronenenergie im Laborsystem.
Durchgezogene Linien: 1.QBA; gestrichelte Linien: O.QBA.

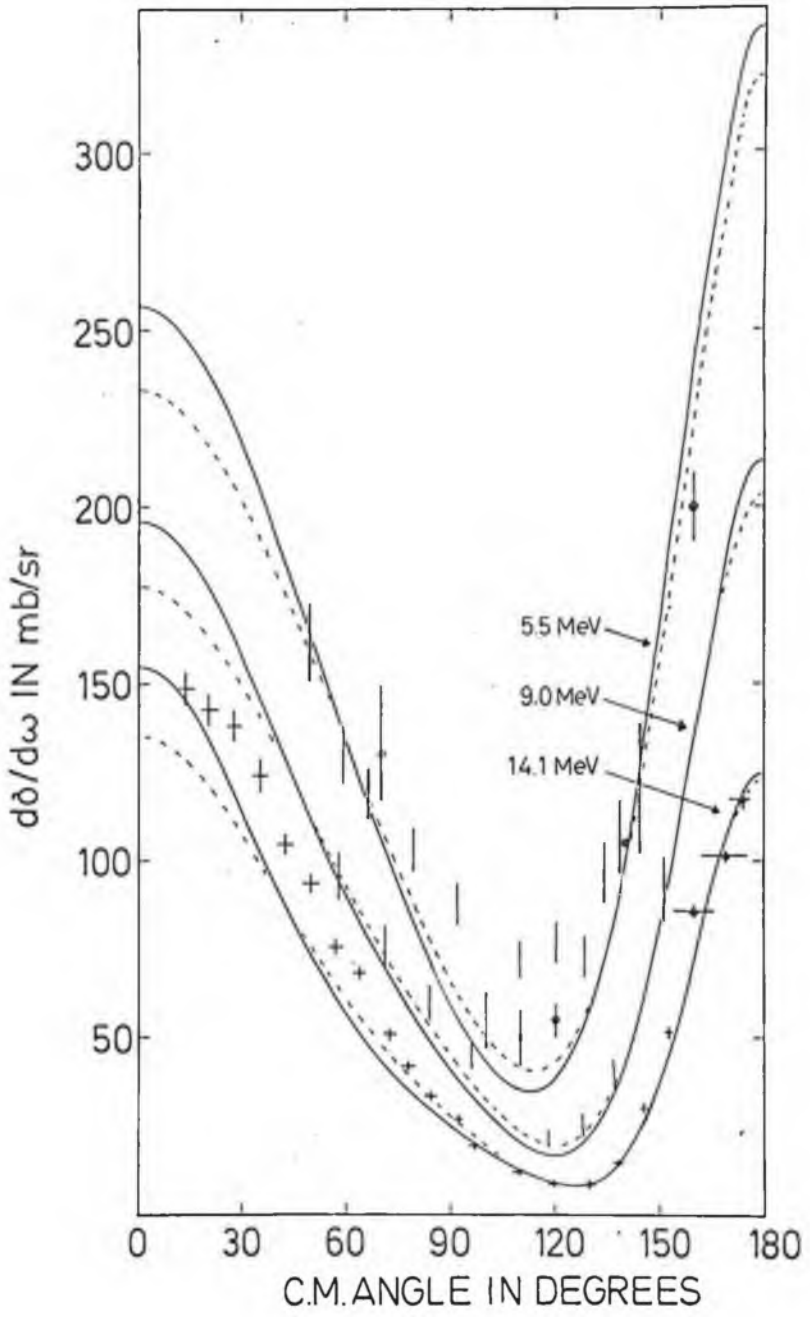


Abb. 25a) Experimentelle und theoretische Winkelverteilung für n-d Streuung.
Durchgezogene Linien: 1.QBA; gestrichelte Linien: 0.QBA.
Experimentelle Daten: ⊦ = Wantuch [85], | = Bonner et al. [86], ⊹ = Seagrave [87] und ┼ = Berrick et al. [88].

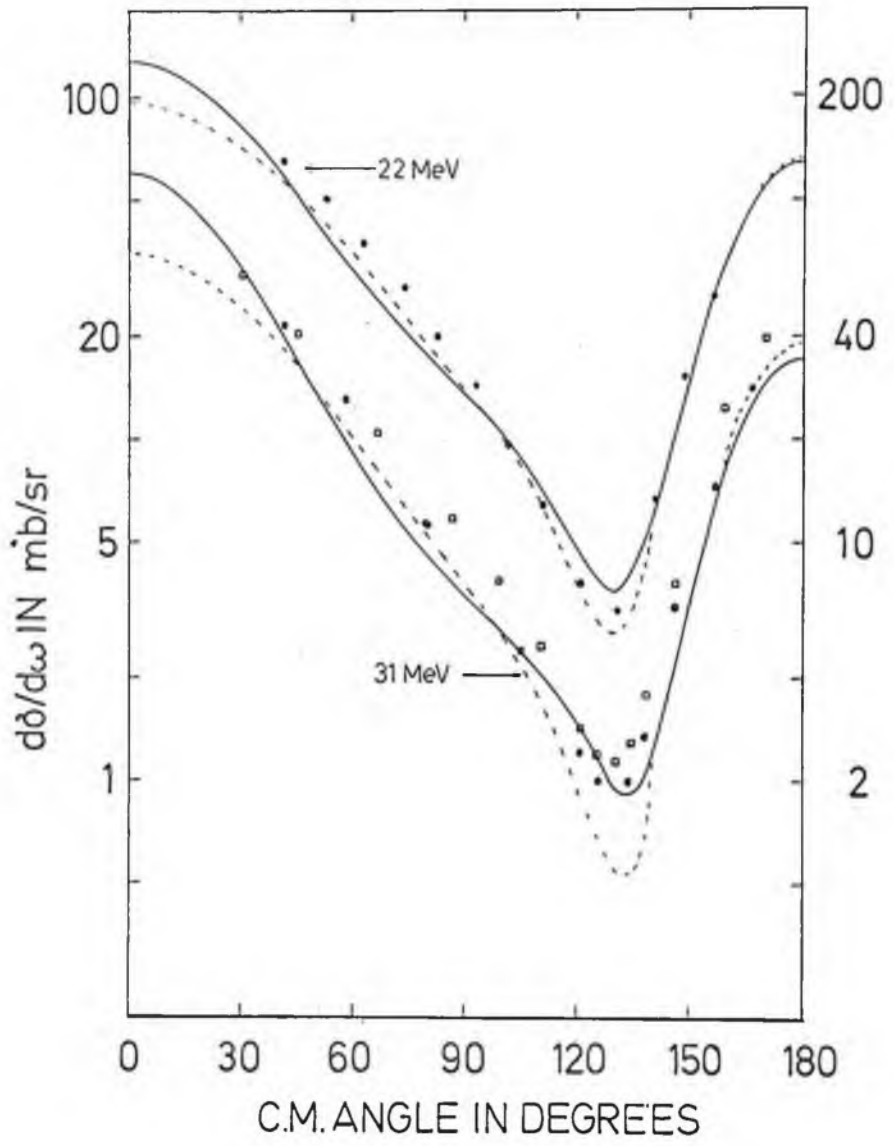


Abb. 25b) Experimentelle und theoretische Winkelverteilung für n-d Streuung.
Durchgezogene Linien: 1.QBA; gestrichelte Linien: 0.QBA.
Experimentelle Daten: 22 MeV • = Bunker et al. [89],
31 MeV □ = Kim et al. [90], • = Johnston et al. [91].

pauschal insensitiv. Genaugenommen liegt im Quartettkanal folgendes vor: Da die beiden Neutronen parallelen Spin haben, werden sie im S-Zustand von der Paulirepulsion auseinander gehalten. Im P-Zustand ist das Pauliverbot nicht wirksam, und folglich sind bei der Streuung Potentialdetails spürbar. Um aufzuzeigen, welche Details des Potentials im ^{4}P-Zustand besonders zur Wirkung kommen, haben wir die Beiträge der Graphen von Abb. 22 zur ^{4}P-Wellenstreuung im einzelnen bestimmt (siehe Tabelle IX).

Tabelle IX Ergebnisse für den Realteil der Phasenverschiebung (in Grad) in der ^{4}P-Welle bei 9 MeV Neutronenenergie im Laborsystem. Die bei der Rechnung berücksichtigten Graphen (siehe Abb. 22) sind die in der betreffenden Spalte angegebenen und alle links davon aufgeführten.

Graphen	0 =0.QBA	+1+2	+3	+4 =1.QBA
$^4\delta_1$	31.16	30.06	26.88	33.26

Auffällig ist der starke Beitrag der Graphen 3 und 4. Während der Graph 3 repulsiv ist, wirkt Graph 4 attraktiv. Die Repulsion wird dadurch überkompensiert. Wenn man für die Graphen die entsprechenden Matrixelemente hinschreibt, sieht man den Ursprung dieser Effekte. Wir denken uns dabei die Restwechselwirkung nach Partialwellen entwickelt

$$V'(\vec{p},\vec{p}') = \sum_{\ell=0}^{\infty} (2\ell+1)\, V'_\ell(p,p')\, P_\ell(\hat{p}\cdot\hat{p}') \qquad (6.8)$$

Mit Gl. (6.8) ergibt sich für die beiden Graphen 3 und 4

$$\langle \vec{q}' | V^{(3,4)}_{(Z)} | \vec{q} \rangle = \int d^3k \, \frac{\chi(\vec{k}+\frac{\vec{q}}{2}) \sum (2\ell+1) V_\ell(|\vec{q}+\frac{\vec{k}}{2}|, |\vec{q}'+\frac{\vec{k}}{2}|) P_\ell(\pm x) \chi(\vec{k}+\frac{\vec{q}'}{2})}{\left[(\vec{k}+\frac{\vec{q}}{2})^2 + \frac{3}{4}q^2 - Z\right]\left[(\vec{k}+\frac{\vec{q}'}{2})^2 + \frac{3}{4}q'^2 - Z\right]} \qquad (6.9)$$

Dabei ist x der Cosinus des Winkels zwischen den Vektoren $\vec{q} + \vec{k}/2$ und $\vec{q}' + \vec{k}/2$. In $P_\ell(\pm x)$ gilt das obere Vorzeichen für $V^{(4)}$, das untere für $V^{(3)}$. Wegen

$$P_\ell(-x) = (-1)^\ell P_\ell(x) \qquad (6.10)$$

ist $V^{(3)}$ für ungerades ℓ repulsiv. Diese Repulsion überwiegt in der ^{4}P-Welle, deshalb der negative Beitrag von Graph 3. In der Summe heben sich die Beiträge für ungerades ℓ auf. Die 1.QBA ist also für Wigner- und Serberpotential identisch. Erst die (weniger wichtigen) höheren Ordnungen geben unterschiedliche Ergebnisse. Unsere Betrachtung liefert somit die Erklärung für die Beobachtung von McDonald und Nuttall, wonach Wigner- und Serberpotential fast identische Resultate liefern.

Die Summe der beiden Graphen 3 und 4 enthält nur Beiträge für gerade ℓ. Diese Beiträge sind für rein attraktives Potential alle attraktiv, und entsprechend wird durch die beiden Graphen die Attraktion im Dreinukleonensystem erhöht. Dies ist die Ursache für die Erhöhung der ^{4}P-Phase und somit auch die Ursache für die Erhöhung der Vorwärts- und Rückwärtspeaks gegenüber der O.QBA. Ob dies vom s-Wellen Anteil des Restpotentials oder von den höheren Partialwellen verursacht wird, ist ohne eine separate Berechnung der Beiträge in Gl. (6.9) nicht zu sagen. Leider ist die analytische Ausführung der Integration unmöglich. Für das soft-core Malfliet-Tjon Potential I-III, für das eine separable Entwicklung[+)] des s-Wellen Anteils vorliegt [92], konnte man den s-Wellen Beitrag berechnen [93]. Dabei ergab sich, daß die höheren Partialwellen nur wenig beitragen. Es ist anzunehmen, daß dies auch für das rein attraktive Potential II-IV gilt. Allerdings hat dieses Potential eine größere Reichweite, so daß eine etwas stärkere Betonung der höheren Partialwellen wahrscheinlich ist.

Die gute Übereinstimmung zwischen Theorie und Experiment sollte jedoch nicht zu dem Schluß verleiten, daß das Yukawapotential

---

+) Wenn v' faktorisiert, können einige Integrationen in Gl. (6.9) analytisch durchgeführt werden.

realistischer ist als das separable Yamaguchipotential. Schon die zu starke Bindung des Triton zeigt, daß dies nicht so ist. Unser Ergebnis sollte vielmehr so interpretiert werden: Das Experiment verlangt eine höhere ^{4}P-Phase und somit ein Mehr an Attraktion im ^{4}P-Zustand - dies kann durch ein lokales Yukawapotential erreicht werden. Wir werden jedoch in Abschnitt 6.4 sehen, daß dies nicht die einzige Möglichkeit ist.

6.3 Anwendung der Quasiteilchenmethode auf Dreiteilchensysteme mit soft-core Potential

Um die Quasiteilchenmethode auf soft-core Potentiale anwenden zu können, muß untersucht werden, welche Abspaltung von separablen Potentialen zu störungstheoretisch behandelbaren Restpotentialen führt. Dazu ist ein Studium der Eigenwerte der homogenen Lippmann-Schwinger Gleichung

$$V' g_0(z) |\chi_\nu(z)\rangle = \eta_\nu(z) |\chi_\nu(z)\rangle \tag{6.11}$$

nötig. Es ist ja klar, daß für Potentiale, die zu Eigenwerten

$$|\eta_\nu(z)| \geq 1 \tag{6.12}$$

führen, die Neumannreihe nicht konvergieren kann. Wendet man nämlich die Neumannreihe auf die Eigenfunktion $|\chi_\nu\rangle$ an

$$g'(z) |\chi_\nu(z)\rangle = g_0 \sum_{\mu=0}^{\infty} (V' g_0)^\mu |\chi_\nu\rangle = g_0 \sum_{\mu=0}^{\infty} \eta_\nu^\mu |\chi_\nu\rangle \tag{6.13}$$

so erhält man für $|\eta_\nu| > 1$ ein divergentes Resultat. Dasselbe gilt auch für die Dreiteilchenresolvente

$$G'(z) = g_0(z) \sum_{\mu=0}^{\infty} \left(\sum_{\gamma=1}^{3} V'_\gamma g_0(z) \right)^\mu \tag{6.14}$$

die explizit divergente Teilreihen der Art (6.13) enthält. Solche Eigenwerte gehören zu Bindungszuständen, Antiboundstates oder Resonanzen. Dazu gehören auch Bindungszustände, Antiboundstates und Resonanzen, die entstehen würden, wenn man das

Tabelle X Parameter des soft-core Malfliet-Tjon Potentials [84] $V_i(r) = \hbar^2/m \sum_{j=1,2} g_{ij} e^{-\mu_{ij} r}/r$

Spinzustand	g_{i1} [F^{-1}]	g_{i2} [F^{-1}]	μ_{i1} [F^{-1}]	μ_{i2} [F^{-1}]
Triplett	15.3	35.1	1.55	3.11
Singulett	12.6	35.1	1.55	3.11

Tabelle XI Die sechs ersten Eigenwerte [92] für das soft-core Malfliet-Tjon Potential

ν =	1	2	3	4	5	6
Triplett	1.000	-2.005	-0.496	-0.220	+0.159	-0.123
Singulett	0.927	-2.717	-0.660	-0.291	-0.163	+0.115

Tabelle XII Die sechs ersten Eigenwerte für das Eigenwertproblem $t'(z) q_0(z) |\psi_\nu(z)\rangle = \tilde{\eta}_\nu(z) |\psi_\nu(z)\rangle$

ν =	1	2	3	4	5	6
Triplett	0	-0.667	-0.332	-0.180	+0.189	-0.110
Singulett	0	-0.731	-0.398	-0.225	-0.140	+0.130

Vorzeichen des Potentials umdrehen würde. Die dazu gehörenden Eigenwerte heißen repulsive Eigenwerte. Solche repulsiven Eigenwerte treten bei soft-core Potentialen, wie z.B. bei dem Malfliet-Tjon Potential I-III [84], auf. Die Parameter dieses Potentials sind in Tabelle X wiedergegeben, seine Niederenergiedaten in Tabelle VII. Durch den soft-core erreicht man eine sehr gute Wiedergabe der experimentellen Singulett- und Triplett-s-Phasen bis 300 MeV Laborenergie. Die Eigenwerte des Malfliet-Tjon Potentials sind aus Tabelle XI zu ersehen [92]. Der erste Eigenwert des Singulett Potentials ist zwar kleiner als 1, doch liegt dies daran, daß man die Eigenwerte nicht bei der Energie des Antiboundstates im 2. Blatt bestimmt hat (das ergäbe $\eta_1^s = 1$), sondern bei z = 0. Die Eigenwerte des Triplett Potentials sind bei der Energie des Bindungszustandes bestimmt worden. Wie man aus Tabelle XI ersieht, gibt es zwei repulsive Eigenwerte, die die Konvergenz der Neumannreihe verhindern. Der Anteil des Potentials, der für diese Eigenwerte verantwortlich ist, müßte deshalb eigentlich durch je einen separablen Term berücksichtigt werden, was eine Quasiteilchenrechnung erheblich erschweren würde.

Einen Ausweg bietet die formale Aufsummation der divergenten (Teil-) Reihen Gl. (6.13)(6.14), wodurch das Potential durch die Zweiteilchen T-Matrix ersetzt wird. Das ergibt

$$g'(z) = g_0(z)\, t'(z)\, g_0(z)$$

$$G'(z) = g_0 + g_0 \sum_{\gamma=1}^{3} t'_\gamma g_0 + g_0 \sum_{\gamma=1}^{3} t'_\gamma g_0 \sum_{\gamma'=1}^{3} t'_{\gamma'} g_0 + \ldots \qquad (6.15)$$

mit $$t'_\beta = v'_\beta + v'_\beta g_0 v'_\beta + \ldots = (1 - v'_\beta g_0)^{-1} v'_\beta$$

Durch das Aufsummieren wird die Reihe weniger divergent:

1. Es verschwinden divergente Teilreihen.
2. Der Operator $v'_\gamma g_0$ wird durch $t'_\gamma g_0$ ersetzt. Der Operator $t'_\gamma g_0$ hat für die repulsiven Terme wesentlich kleinere Eigenwerte, (siehe Tabelle XII, für $\nu = 1$ verschwinden

die Eigenwerte, da die entsprechenden Potentialanteile exakt berücksichtigt werden).

3. Glieder mit $g_o t'_\gamma g_o t'_\gamma g_o$ treten nicht auf.

Damit ist natürlich die Konvergenz der Reihe noch nicht bewiesen. (Auf die Problematik eines solchen Beweises waren wir in Abschnitt 4.1 eingegangen.)

Die Anwendung der Quasiteilchenmethode benötigt nur Matrixelemente von G'(z), und es zeigt sich, daß die Korrekturterme in 1.QBA zum effektiven Potential

$$V_{\beta\alpha} = (1-\delta_{\beta\alpha})\langle\chi_{\beta_1}|g_o|\chi_{\alpha_1}\rangle + \sum_{\gamma=1}^{3}\langle\chi_{\beta_1}|g_o t'_\gamma g_o|\chi_{\alpha_1}\rangle \qquad (6.16)$$

sehr klein sind im Vergleich zur O.QBA und sich zum Teil gegenseitig aufheben [94].

Auf Gl. (6.16) gelangt man auch ohne die Aufsummationstechnik, wenn man die Quasiteilchenmethode auf die Alt-Grassberger-Sandhas Gleichungen (2.30) anwendet. Ein Nachteil scheint zu sein, daß man jetzt Matrixelemente von t' berechnen muß, wobei t' nur numerisch berechenbar ist, während man in der alten Methode teilweise analytische Ausdrücke hatte, da ja v' analytisch bekannt war. Durch separable Entwicklung des S-Wellenanteils von v' gelingt es aber, t' analytisch anzugeben.

Es ist zu überlegen, inwieweit die hier speziell für Potentiale mit Repulsion entwickelte Methode auch für rein attraktive Potentiale von Nutzen sein könnte. In diesem Fall hat man zwar keine Probleme mit der Konvergenz der Quasibornreihe, trotzdem ist auch hier eine teilweise Aufsummation von Nutzen, da man in 1.QBA dann mehr mitnimmt als bisher. Wie der Vergleich der Eigenwerte von $v'g_o$ mit $t'g_o$ zeigt (siehe Tab. XI,XII), werden repulsive Eigenwerte überschätzt, attraktive aber unterschätzt, wenn man die Näherung t' = v' macht. Das entspricht ganz der Situation bei der geometrischen Reihe - alterniert die Reihe, so ist das 1. Glied größer als die Summe, alterniert sie nicht, so ist das 1. Glied kleiner.

In dem von uns untersuchten Yukawapotential verhalten sich die Eigenwerte ähnlich wie beim Hulthén Potential

$$\eta_\nu(z=0) = \frac{1}{\nu^2} = 1\,,\ 0.25\,,\ 0.11\ldots\,,\ldots \qquad (6.17)$$

Der zweite Eigenwert liegt hier wesentlich näher am (exakt mitgenommenen) 1. Eigenwert als der 1. attraktive Eigenwert beim Malfliet-Tjon Potential I-III.

Für die Eigenwerte von $t'g_o$ erhält man[+)]

$$\tilde{\eta}_\nu(z=0) = \frac{\eta_\nu}{1-\eta_\nu} = \frac{1}{\nu^2-1} = 0.333\ldots\,,\ 0.125\,,\ldots (6.18)$$

Das zeigt, daß die Aufsummation für $\nu = 2$ nicht uninteressant ist, nur muß man sich überlegen, ob der Aufwand lohnt, da das eine Vermehrung der aufwendig zu berechnenden Graphen vom Typ 3 und 4 (siehe Abb. 22) mit sich bringt.

Aus der Gegenüberstellung sieht man, daß die 1.QBA bei rein attraktivem Potential das Potential zuwenig ausschöpft, und das ist wohl der Grund, warum die Tritonbindungsenergie etwas zu klein herauskommt und die exakten ^{2}S-Phasen von unten angehähert werden.

6.4 Ergebnisse für das Dreinukleonensystem mit soft-core Potential

Aus den Untersuchungen von Bakker und Sandhas [94] ergibt sich, daß die Korrekturen in 1.QBA für das Malfliet-Tjon Potential I-III äußerst klein sind. In der Tat zeigt die praktische Rechnung, daß die Differenz zwischen O.QBA und exaktem Resultat für $^2\delta_o$ unterhalb der Aufbruchsschwelle etwa 2^o beträgt [95]. Damit liegt die O.QBA für soft-core Potential näher am exakten Wert

---

+) Der erste Eigenwert ($\nu = 1$) kommt nicht in Betracht, da der dazugehörende Potentialanteil durch die Abspaltung eines separablen Potentials exakt berücksichtigt wird.

als die 1.QBA für rein attraktives Potential. Daraus ergibt sich das Kuriosum, daß eine Dreiteilchenrechnung mit der Quasiteilchenmethode für soft-core Potential einfacher ist als für rein attraktives Potential, da man sich mit der O.QBA begnügen kann. Für eine Variationsrechnung würden die Verhältnisse gerade umgekehrt liegen, da das soft-core Potential wesentlich flexiblere Testfunktionen erfordert.

Als Formfaktor für das das Malfliet-Tjon Potential approximierende separable Potential nimmt man die 1. Eigenfunktion der homogenen Lippmann-Schwinger Gleichung (6.11). Bakker [92] hat für diesen Formfaktor eine Entwicklung nach Yamaguchi Formfaktoren angegeben

$$\chi_1(p) = \sum_{\nu=1}^{15} c_\nu / (\alpha^2 p^2 + \beta_\nu^2)$$

$$\beta_\nu = \begin{cases} \alpha\sqrt{-E^D} + \nu & \text{im Triplett Zustand} \\ \nu & \text{im Singulett Zustand} \end{cases} \qquad (6.19)$$

$$\alpha = 0.48231\ F$$

Die Potentialtiefe und die Entwicklungskoeffizienten sind in Tabelle XIV zu finden.

Bei der Verarbeitung eines solch komplizierten Formfaktors in einer Dreiteilchenrechnung ist es nötig, alle $\chi_1(p)$ beinhaltenden Integrationen numerisch durchzuführen, da ansonsten (χ_1 geht in die Matrixelemente quadratisch ein) sich der Rechenaufwand um einen Faktor 15 x 15 = 225 gegenüber dem simplen Yamaguchi Formfaktor erhöhen würde. Die numerische Integration ist jedoch auch oberhalb der Aufbruchsschwelle kein Problem, wenn man bei singulärem Integranden Subtraktionstechnik verwendet. Beachtet man dies, so wird die Behandlung eines Dreinukleonensystems mit soft-core Potential bedeutend einfacher als bisher - anstatt die zweidimensionalen Faddeev Gleichungen etwa mit Padétechnik zu lösen [96], genügt jetzt die Lösung der eindimensionalen Quasiteilchengleichungen (6.2) in O.QBA mit dem Bakkerschen Formfaktor.

Tabelle XIV Potentialtiefe λ und Entwicklungskoeffizienten c_ν für das das Malfliet-Tjon Potential I-III approximierende separable Potential nach Bakker [92]

	Singulett	Triplett
	λ	λ
	-0.92695	-1.00000
ν	c_ν $[F^{1/2}]$	c_ν
1	-.156 639 294 157 18 $_{10}$+1	+.201 638 700 384 74 $_{10}$+1
2	+.423 774 004 551 02 $_{10}$+2	-.423 353 141 772.89 $_{10}$+2
3	-.114 967 324 743 38 $_{10}$+4	+.103 536 774 492 84 $_{10}$+4
4	+.197 513 387 336 96 $_{10}$+5	-.168 074 207 687 23 $_{10}$+5
5	-.206 536 988 847 60 $_{10}$+6	+.168 617 389 793 52 $_{10}$+6
6	+.139 997 554 168 46 $_{10}$+7	-.110 670 619 799 58 $_{10}$+7
7	-.645 284 726 758 26 $_{10}$+7	+.497 061 405 491 98 $_{10}$+7
8	+.208 504 263 118 58 $_{10}$+8	-.157 211 567 385 94 $_{10}$+8
9	-.480 248 040 798 67 $_{10}$+8	+.355 639 076 533 02 $_{10}$+8
10	+.792 170 451 853 22 $_{10}$+8	-.577 645 978 505 71 $_{10}$+8
11	-.928 297 608 916 88 $_{10}$+8	+.667 907 694 427 45 $_{10}$+8
12	+.754 155 806 589 58 $_{10}$+8	-.536 278 230 093 02 $_{10}$+8
13	-.403 649 165 211 87 $_{10}$+8	+.284 064 821 090 86 $_{10}$+8
14	+.127 971 393 411 06 $_{10}$+8	-.892 269 667 701 66 $_{10}$+7
15	-.181 994 387 798 74 $_{10}$+7	+.125 840 220 140 66 $_{10}$+7

Die Ergebnisse sind in Abb. 26 aufgetragen, im Vergleich mit den exakten Resultaten von Kloet und Tjon [96]. Abb. 26 enthält auch die Ergebnisse für das von Bakker [92] eingeführte Yamaguchi Potential T5/55, das annähernd die gleichen Niederenergiedaten im Zweinukleonensystem liefert wie das Malfliet-Tjon Potential. Die Dreinukleonenergebnisse für dieses Yamaguchi Potential sind näher an den exakten Ergebnissen von Kloet und Tjon als die Ergebnisse von Sloan [97], die in Ref. [96] als Vergleich benutzt wurden. Trotzdem ist die Übereinstimmung zwischen O.QBA und

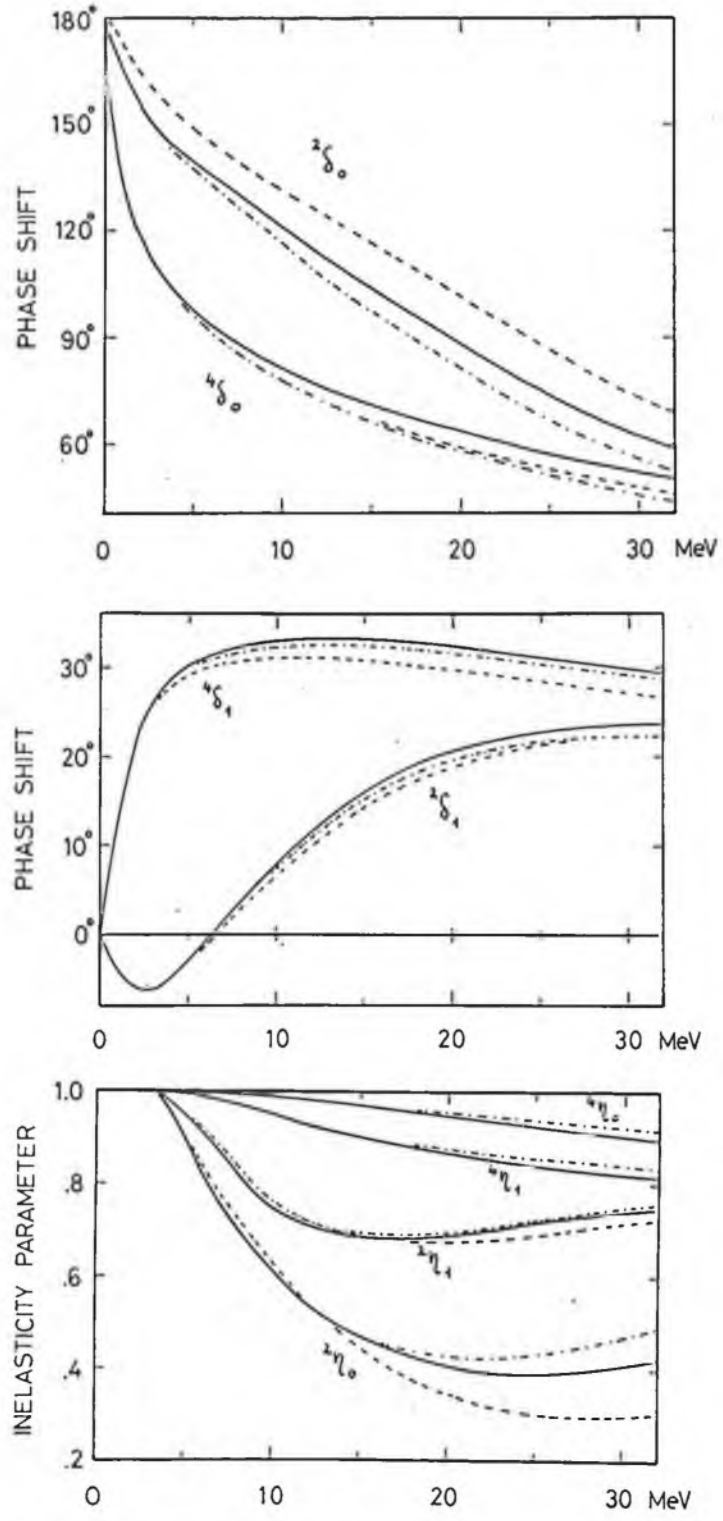


Abb. 26 Realteil der Phasenverschiebung und Inelastizitätsparameter für das Malfliet-Tjon Potential I-III in Abhängigkeit von der Neutronenenergie im Laborsystem. Durchgezonene Linien: Ref. [96]; strichpunktierte Linien: O.QBA; gestrichelte Linien: Yamaguchi Potential.

exakter Rechnung weit besser als für das Yamaguchi Potential, außer für die ^{4}S- und die ^{2}P-Welle bei höheren Energien. Wo keine Ergebnisse für das Yamaguchi Potential gezeigt werden, sind sie identisch mit der O.QBA. Höhere Partialwellen sind nicht sehr sensitiv gegen Potentialdetails - hier geben Malfliet-Tjon Potential, O.QBA und Yamaguchi Potential fast identische Ergebnisse.

Für die Güte der in O.QBA berechneten elastischen Wirkungsquerschnitte ist es wichtig, daß die O.QBA eine ^{4}P-Phase liefert, die wesentlich höher liegt als das Yamaguchi-Resultat und mit der exakten Phase auch bei hohen Energien fast übereinstimmt. Wie Abb. 27a) zeigt, kommen die in O.QBA berechneten Wirkungsquerschnitte dem exakten Resultat sehr nahe. Insbesondere in Vorwärtsrichtung beobachtet man fast dieselbe Verbesserung gegenüber dem Yamaguchi Potential wie in der exakten Rechnung.

Der Unterschied zwischen Yamaguchi Potential und Malfliet-Tjon Potential liegt in der Repulsion, die im letzteren durch den soft-core erzeugt wird[+)]. Es scheint zunächst unverständlich, wie die Repulsionseffekte die $^4\delta_1$-Phase so entscheidend beeinflussen können. In Wirklichkeit ist jedoch die Vergrößerung der $^4\delta_1$-Phase gegenüber dem Yamaguchi Potential nur indirekt mit dem soft-core verbunden. Ein Potential mit soft-core muß im attraktiven Teil tiefer sein als ein rein attraktives Potential, um bei niederen Energien den gleichen Zweiteilchenphasenverlauf zu ergeben. Allein dieser Bereich wirkt in der ^{4}P-Streuung infolge der Zentrifugalbarriere und erhöht die Phase.

Für höhere Energien (Abb. 27b)) ist die O.QBA in Vorwärtsrichtung immer noch besser als die Rechnung mit Yamaguchi Potential, doch gelingt es nicht, das Minimum bei 130° richtig wiederzugeben. Verglichen mit dem Experiment versagt hier jedoch auch die exakte Rechnung mit dem Malfliet-Tjon Potential. Am besten schneidet hier seltsamerweise das Yamaguchi Potential ab.

+) Da der Bakkersche Formfaktor auch negativ werden kann, enthält auch die O.QBA Repulsionseffekte.

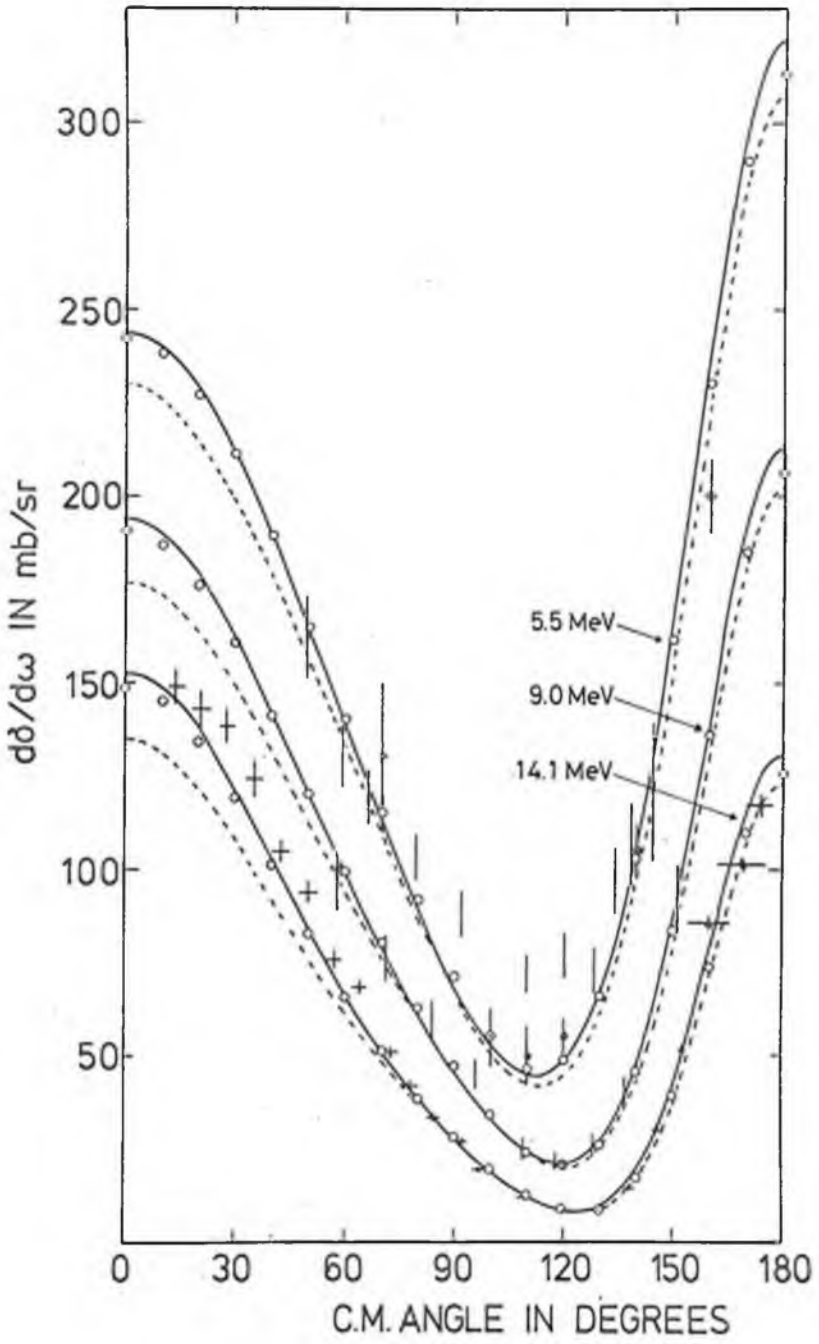


Abb. 27a) Experimentelle und theoretische Winkelverteilung für n-d Streuung.
Durchgezogene Linien: Ref. [96]; Kreise: O.QBA; gestrichelte Linien: Yamaguchi Potential. Experimentelle Daten: ϕ = Wantuch [85]; | = Bonner et al. [86]; ⋔ = Seagrave [87] und ┼ = Berrick et al. [88].

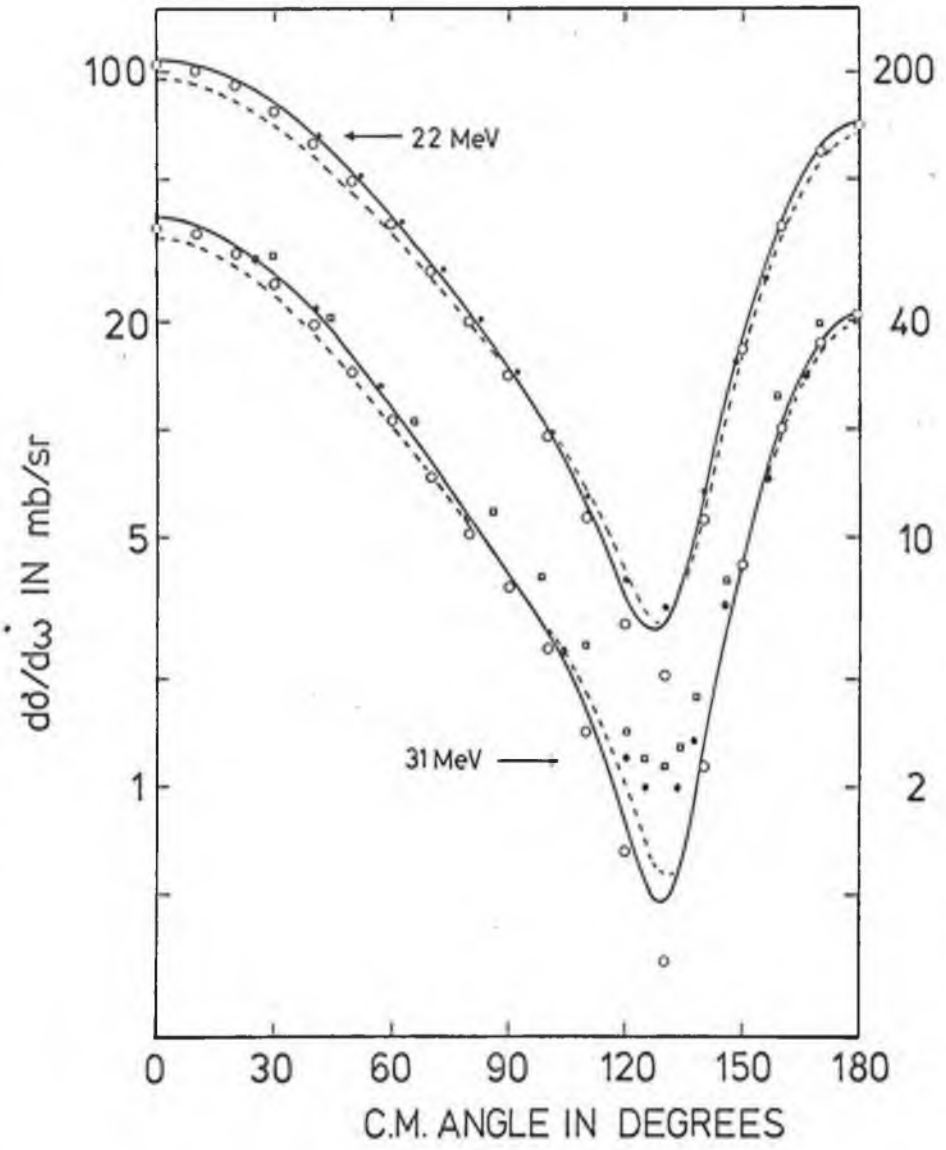


Abb. 27b) Experimentelle und theoretische Winkelverteilung für n-d Streuung.
Durchgezogene Linien: Ref. [96]; Kreise: O.QBA; gestrichelte Linien: Yamaguchi Potential. Experimentelle Daten: 22 MeV • = Bunker et al. [89]; 31 MeV □ = Kim et al. [90]; ◦ = Johnston et al. [91]; linker Maßstab für 22 MeV, rechter Maßstab für 31 MeV.

Trotzdem kann man natürlich nicht sagen, daß das Yamaguchi Potential in diesem Fall realistischer ist als das Malfliet-Tjon Potential; denn der hohe Wert für den Wirkungsquerschnitt kann direkt mit der fehlenden Repulsion im Yamaguchi Potential in Verbindung gebracht werden.

Die Ursache des Minimums ist ein Verschwinden des sonst dominierenden Quartettbeitrages. Hier öffnet sich sozusagen ein Fenster, durch das der sonst verdeckte Doublettbeitrag sichtbar wird. Dieser Doublettbeitrag wird von der sehr sensitiven ^{2}S-Welle bestimmt. Ihr Beitrag ist (wenn man von Interferenzen mit anderen, weniger sensitiven Partialwellen absieht) gegeben durch

$$\left(\frac{d\sigma}{d\Omega}\right)_{Min} \sim \frac{1}{4}(1-{}^2\eta_0)^2 + {}^2\eta_0 \sin^2({}^2\delta_0) \qquad (6.20)$$

Dieser Beitrag ist für das Yamaguchi Potential am höchsten. Wegen der fehlenden Repulsion ist nämlich das Triton zu stark gebunden; dies gibt eine negative Streulänge und einen hohen Wert für den Realteil der Phase, der nach Gl. (6.20) einen hohen Wert für das Minimum ergibt. Dieser Wert ist allerdings immer noch um einen Faktor 2 zu klein. Es ist unmöglich, durch Vergrößerung der Anziehung des Potentials (auch ohne Rücksichtnahme auf eine weitere Überbindung des Tritons) den experimentellen Wert zu erreichen; denn das würde den Wert für $^2\eta_0$ weiter verkleinern (siehe Abschnitt 6.5), so daß der Beitrag in Gl. (6.20) effektiv nicht größer werden kann. Das macht wohl klar, daß das Minimum mit Zentralpotentialen nicht richtig wiedergegeben werden kann.

Vergleicht man die totalen elastischen Wirkungsquerschnitte (Tab. XV), so stellt man fest, daß die O.QBA besser ist als diese Yamaguchi Näherung, außer für hohe Energien, wo im Ergebnis für das Yamaguchi Potential der zu niedrige Vorwärtspeak durch das höhere Minimum bei 130° ausgeglichen wird.

Für den totalen Aufbruchsquerschnitt scheint die Yamaguchi Approximation der O.QBA bei höheren Energien überlegen zu sein, obwohl die O.QBA in den einzelnen Partialwellen ebenso genau oder oft viel genauer als die Yamaguchi Approximation ist.

Tabelle XV

Energie (MeV,Lab)	5.5	9.	14.1	22.	31.
	Totaler elastischer Wirkungsquerschnitt [mb]				
Exakt [96]	1465	970	624	365	221
O.QBA	1467	961	608	346	203
Yamaguchi	1393	911	574	331	199
	Totaler Aufbruchsquerschnitt [mb]				
Exakt [96]	69	145	164	150	127
O.QBA	63	137	158	144	120
Yamaguchi	59	135	159	148	125

Der Unterschied ist nur, daß die mit der O.QBA berechneten Inelastizitätsparameter das exakte Resultat systematisch von oben annähern, was für die Yamaguchi Approximation nicht gilt. Die Fehler im Yamaguchi Resultat heben sich auf diese Weise zum Teil auf.

Die hier vorgeführten Ergebnisse zeigen wohl deutlich, daß man den S-Wellen Anteil eines realistischen Nukleon-Nukleon Potentials einfacher als bisher behandeln kann, und das ist genau das, was man braucht, wenn man auf ökonomische Weise Rechnungen mit noch komplizierteren Wechselwirkungen machen will.

6.5 Zusammenfassung

Wir wollen hier versuchen, die einzelnen Ergebnisse der vorausgehenden Abschnitte in einen gewissen Zusammenhang zu bringen.

Das interessanteste Ergebnis ist wohl die Vergrößerung der ^{4}P-Phase und somit die Vergrößerung der elastischen Wirkungsquerschnitte in Vorwärtsrichtung gegenüber den mit Yamaguchi Potential erzielten Resultaten. Die für verschiedene Potentiale berechneten ^{4}P-Phasen sind in Tab. XVI zusammengefaßt. Gleichzeitig sind auch Ergebnisse von Phasenanalysen angegeben. Es ist bemerkenswert, daß schon die ältere Phasenanalyse von van Oers und Brockmann [99] einen vernünftigen Wert für die ^{4}P-Phase ergab. Dies ist ein weiteres Indiz dafür, daß die ^{4}P-Phase eine dominierende Rolle im elastischen Wirkungsquerschnitt spielt. Was die Berechnung von $^4\delta_1$ betrifft, so sei hier nochmals betont, daß man eine Vergrößerung der Phase und damit eine Verbesserung der Übereinstimmung von Theorie und Experiment in Vorwärtsrichtung erzielt, wenn man ein Potential verwendet, das im ^{4}P-Zustand ein Mehr an Attraktion liefert als das Yamaguchi Potential. Dies erreicht man mit dem Yukawa Potential ebenso wie mit dem soft-core Malfliet-Tjon Potential, wobei das letztere noch den Vorteil hat, einen vernünftigen Wert für Tritonbindungsenergie und Doublettstreulänge zu liefern.

Einen interessanten Zusammenhang zwischen verschiedenen Observablen des Dreinukleonensystems und den Eigenschaften des zugrunde gelegten Nukleon-Nukleon Potentials haben kürzlich Bruinsma, Ebenhöh, Stuivenberg und van Wageningen [100] aufgezeigt. Für eine große Anzahl von separablen Potentialen mit gleichen Niederenergiedaten zeigten sie, daß ein nahezu linearer Zusammenhang zwischen dem Stärkeparameter S des Potentials (das ist der größte Eigenwert der homogenen Lippmann-Schwinger Gleichung bei der Energie E = 0) und z.B. dem Realteil der Doublett S-Phase besteht.

Es ist interessant, diesen Zusammenhang auch mit Daten für lokale Potentiale zu testen. Das Ergebnis ist in Abb. 28 gezeigt. Es muß noch angemerkt werden, daß Bruinsma et al. [100] die

Tabelle XVI Realteil der Phasenverschiebung (in Grad) in der ^{4}P-Welle bei 9 MeV Neutronenenergie im Laborsystem für verschiedene Potentiale bzw. Phasenanalysen. T5 kennzeichnet die von Bakker [92] übernommenen Potentialparameter.

Yamaguchi (Sloan [97])	Yamaguchi (T5)	Yukawa (0.QBA)	Yukawa (1.QBA)	Malfliet-Tjon (0.QBA)	Malfliet-Tjon (exakt [96])	Phasenanalysen Ref. [98]	Ref. [99]
29.5	31.0	31.2	33.3	32.3	32.7	32.4	33.0

erwähnte lineare Beziehung mit einer weit größeren Anzahl von separablen Potentialen demonstrierten als in Abb. 28 gezeigt werden. Wir konnten jedoch nicht alle Ergebnisse dieser Arbeit übernehmen, da zum Teil mit Niederenergiedaten gearbeitet wurde, die von den unseren zu stark verschieden sind.

Wie Abb. 28 zeigt, erfüllen die Daten für lokales Potential keine lineare Beziehung. Dies mag für das etwas pathologische Yukawa Potential nicht verwunderlich sein. Interessant ist die Abweichung für das soft-core Potential und die zugehörige O.QBA. Hier handelt es sich um Potentiale, die im Gegensatz zu den von Bruinsma et al. untersuchten das Vorzeichen wechseln. Möglicherweise ist dies der Grund für das Abweichen von der linearen Beziehung.

Ein weiterer interessanter Punkt bei der elastischen Nukleon-Deuteron Streuung ist das bei höheren Energien auftretende scharfe Minimum bei ca. 130^{o}. Wir wollen hier zeigen, daß es unmöglich ist, mit einem einigermaßen realistischen Zentral-potential dieses Minimum richtig wiederzugeben. Da der Quartettbeitrag im Minimum verschwindet, liefern verschiedene Potentiale verschieden hohe Minima auf Grund der verschiedenen Werte für $^{2}\delta_{o}$ und $^{2}\eta_{o}$. P- und D-Wellen tragen auch zum Minimum bei, doch geben vernünftige Potentiale für diese Wellen kaum unterschiedliche Ergebnisse. Trägt man nun $^{2}\delta_{o}$ gegen $^{2}\eta_{o}$ auf (siehe Abb. 29), so erhält man einen fast linearen Zusammenhang zwischen diesen beiden Größen. Die von den verschiedenen Phasenanalysen geforderten Werte ($^{2}\delta_{o}$, $^{2}\eta_{o}$) liegen nicht auf dieser Geraden, und es ist anzunehmen, daß nichtzentrale Kräfte nötig sind, um von der Geraden weg und hin zu den experimentellen Werten zu kommen[+)].

[+)] Daß ausgerechnet das Yukawa Potential, dessen $^{2}\delta_{o}$, $^{2}\eta_{o}$ Wert weit von den experimentellen Werten liegt, das Minimum im Wirkungsquerschnitt am besten wiedergibt (siehe Abb. 25b)), hat seine Ursache in dem unnormal hohen Wert für den ^{2}P-Inelastizitätsparameter (siehe Abb. 24d)).

Die Ergebnisse für das Yukawa Potential folgen zwar nicht dem linearen Zusammenhang von Abb. 29, ordnen sich aber in den allgemeinen Trend ein, wonach zur größeren Phase ein kleinerer Inelastizitätsparameter gehört. In dieses Schema paßt nicht das Nuttallsche Ergebnis, weshalb wir annehmen, daß der Wert für $^2\eta_o$ (siehe Abb. 23) bei Nuttall zu hoch ist. Den in Abb. 29 wiedergegebenen Zusammenhang könnte man mit Hilfe von Abb. 28 auch folgendermaßen formulieren: Der ^{2}S-Wellenbeitrag zum Aufbruch ist umso größer, je stärker attraktiv das Potential ist. Diese Regel versagt jedoch in der Nähe der Aufbruchsschwelle, wo die Verhältnisse gerade umgekehrt sind.

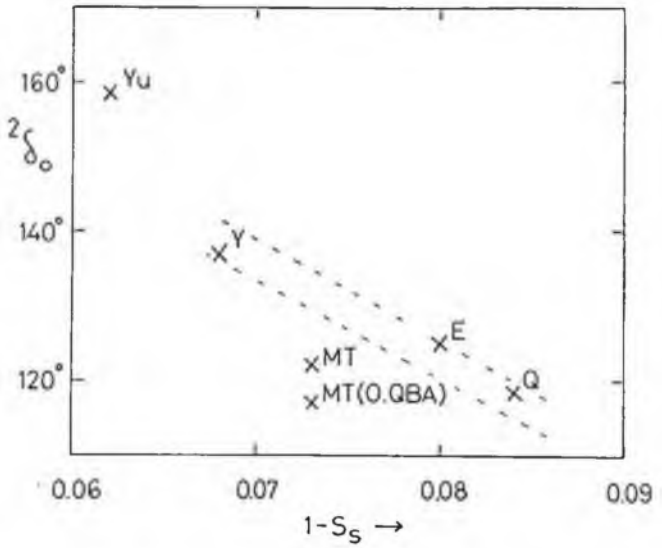


Abb. 28 Realteil der Doublett S-Phase bei 10 MeV Laborenergie in Abhängigkeit vom Stärkeparameter im Singulettzustand. Die gestrichelte Linie gibt Verlauf und Streuung der von Bruinsma et al. [100] aufgedeckten linearen Beziehung an. Y = Yamaguchi-, E = Exponental-, Q = quadratischer Formfaktor [100], MT = Malfliet-Tjon Potential [96], Yu = Yukawa Potential.

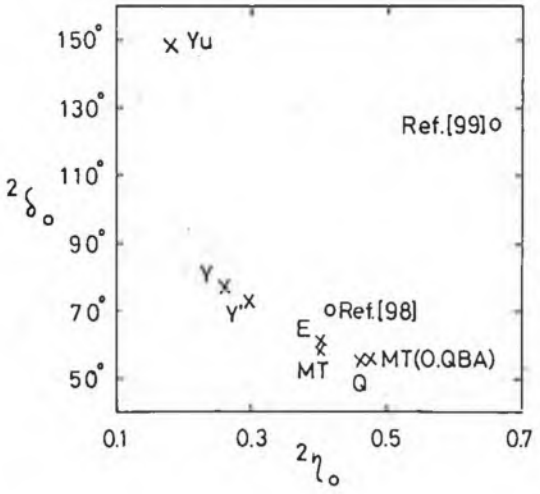


Abb. 29 Realteil der Doublett S-Phase in Abhängigkeit vom Doublett S-Inelastizitätsparameter bei 31 MeV Laborenergie für verschiedene Potentiale (X) und verschiedene Phasenanalysen (O). Abkürzungen wie in Abb. 28. Y' = Yamaguchi Potential mit der Parameterkombination T5/S5 von Bakker [92].

Literatur

[1] W. Sünkel, K. Wildermuth, Phys. Lett. 41B (1972) 439; K. Wildermuth, Y.C. Tang, A Unified Theory of the Nuclei, Vieweg Tracts in Pure and Applied Physics, Vieweg, Braunschweig, Pergamon, New York, in Vorbereitung.

[2] Die Hoffnung auf Informationen über das off-shell Verhalten hat kürzlich durch die Arbeiten von D.D. Brayshaw, Phys. Rev. Lett. 32 (1974) 382, einen Dämpfer erhalten. Danach ist aus der Reaktion n+d → n+n+p bei der gegenwärtigen experimentellen Genauigkeit keine Information über das off-shell Verhalten zu gewinnen, die über die Information hinausgeht, die das Studium der Tritonbindungsenergie liefert.

[3] T.A. Tombrello, Proceedings of the International Conference on Few Particle Problems in the Nuclear Interaction, Los Angeles 1972, North Holland Publishing Company.

[4] L.D. Faddeev, JETP 12 (1961) 1014.

[5] R. Aaron, R.D. Amado, Phys. Rev. 150 (1966) 857.

[6] R.T. Cahill, I.H. Sloan, Nucl. Phys. A165 (1971) 161.

[7] W. Ebenhöh, Nucl. Phys. A191 (1972) 97.

[8] W.M. Kloet, J.A. Tjon, Nucl. Phys. A210 (1973) 380.

[9] Ein kurzer Abriß der zeitabhängigen Streutheorie findet sich in E.W. Schmid, H. Ziegelmann, The Quantum Mechanical Three-Body Problem, Vieweg Tracts in Pure and Applied Physics, Vol. 2, Vieweg, Braunschweig, Pergamon, New York, 1974. Dort ist auch die relevante Originalliteratur zu finden.

[10] S. Weinberg, Phys. Rev. 133B (1964) 232.

[11] Mit dieser Methode wurde die Bindungsenergie für ein Dreibosonensystem von K. Appel, Z. Phys. 235 (1970) 446, berechnet. Das Ergebnis, das eine obere Schranke für die Energie sein soll, wiederspricht aber der unteren Schranke

von Y.C. Tang, R.C. Herndon, E.W. Schmid, Phys. Rev. 134 (1964) B743, sowie der unteren Schranke von R.L. Hall, H.R. Post, Proc. Roy. Soc. 90 (1967) 381.

[12] L.L. Foldy, W. Tobocman, Phys. Rev. 105 (1957) 1099.

[13] W. Glöckle, Nucl. Phys. A141 (1970) 620.

[14] E.O. Alt, P. Grassberger, W. Sandhas, Nucl. Phys. B2 (1967) 167.

[15] D.J. Kouri, F.S. Levin, Phys. Lett. 50B (1974) 421.

[16] Die Eindeutigkeit der Faddeev Gleichung ist in mathematischer Strenge in L.D. Faddeev, Mathematical Aspects of the Three-Body Problem in the Quantum Scattering Theory, Israel Program for Scientific Translations, Jerusalem, 1965, bewiesen.

[17] W. Sandhas, Miniconference on Few Body Problems, Bonn, 26. - 28.11.1974.

[18] P.A. Kazaks, K.R. Greider, Phys. Rev. C1 (1970) 856.

[19] Siehe z.B. Gl. (27) in Ref. [18].

[20] S. Weinberg, Phys. Rev. 131 (1961) 440.

[21] P. Grassberger, W. Sandhas, Z. Phys. 217 (1968) 9.

[22] E.W. Schmid, H. Ziegelmann, The Quantum Mechanical Three-Body Problem, Vieweg Tracts in Pure and Applied Physics, Vol. 2, Vieweg, Braunschweig, Pergamon, New York, 1974, Kap. 6.

[23] S.P. Merkuriev, Laboratoire de Physique Théorique et Haute Energies Report No. 74/1

[24] W. Glöckle, Z. Phys. 271 (1974) 31.

[25] V.N. Efimov, Sov. Journ. Nucl. Phys. 12 (1971) 589.

[26] W. Ritz, J. Reine u. Angew. Math. 135 (1908) 1.

[27] E. Hylleraas, Z. Phys. 54 (1929) 347.

[28] W. Kohn, Phys. Rev. 74 (1948) 1763.

[29] E.W. Schmid, J. Schwager, Nucl. Phys. A180 (1972) 434.

[30] E.W. Schmid, Bundesministerium für Bildung und Wissenschaft, Forschungsbericht K70-32, 1970;
E.W. Schmid, K.H. Hoffmann, Nucl. Phys. A175 (1971) 443.

[31] K. Ladányi, Nuovo Cim. 61A (1969) 173.

[32] F.E. Harris, H.H. Michels, Phys. Rev. Lett. 22 (1969) 1036.

[33] E.W. Schmid, Acta Phys. Aust., Suppl. 9 (1972) 44;
Nuovo Cim. 18A (1973) 771.

[34] J. Schwager, Nucl. Phys. A221 (1974) 371.

[35] F. Sohre, E.W. Schmid, Z. Naturforsch. 30a (1975) 271.

[36] M. Lieber, L. Rosenberg, L. Spruch, Phys. Rev. D5 (1972) 1347.

[37] J. Schwager, Proc. of the IInd International Conference on Clustering Phenomena in Nuclei, Maryland, 1975.

[38] J. Revai, J. Raynal, Lett. Nuovo Cim. 9 (1974) 461.

[39] E.W. Schmid, J. Schwager, Proc. of the Symposium on the Nuclear Three-Body Problem, Budapest, 1971;
R. Mader, Dissertation, Universität Tübingen, 1975.

[40] J. Nuttall, H.L. Cohen, Phys. Rev. 188 (1969) 1542.

[41] F.A. McDonald, J. Nuttall, Phys. Rev. C6 (1972) 121.

[42] S.C. Pieper, L. Schlessinger, J. Wright, Phys. Rev. D1 (1970) 1674; eine elegante Herleitung dieses Verfahrens haben P. Grassberger, E.O. Alt, W. Sandhas in Kabul Science 2 (1971) 1, publiziert; ein weiteres Verfahren, das auf Lippmann-Schwinger artige Gleichungen (z.B. Gl. (2.52)) zugeschnitten ist, stammt von I.H. Sloan, T.J. Brady, Phys. Rev. C6 (1972) 701.

[43] C. Gignoux, A. Laverne, Phys. Rev. Lett. 29 (1972) 436.

[44] C. Gignoux, A. Laverne, S.P. Merkuriev, Phys. Rev. Lett. 33 (1974) 1350.

[45] W. Glöckle, Z. Phys. 271 (1974) 31. — also ref 24

[46] T.A. Osborne, Slac Report 79, 1967;
J.W. Humberston, R.L. Hall, T.A. Osborne, Phys. Lett. 27B (1968) 195.

[47] Y.E. Kim, J. Math. Phys. 10 (1969) 1491;
E.P. Harper, Y.E. Kim, A. Tubis, Phys. Rev. C6 (1972) 1601.

[48] H.P. Noyes, Phys. Rev. D5 (1972) 1547.

[49] H.P. Noyes, Phys. Rev. Lett. 15 (1965) 538;
K.L. Kowalski, Phys. Rev. Lett. 15 (1965) 798.

[50] M. Fuda, Phys. Rev. C3 (1971) 485.

[51] E.O. Alt, P. Grassberger, W. Sandhas, Phys. Rev. D1 (1970) 2581;
E.O. Alt, Acta Phys. Austr., Suppl. 9 (1972) 139;
E.O. Alt, W. Sandhas, in Few Particle Problems in the Nuclear Interaction, herausgegeben von I. Slaus, S.A. Moszkowski, R.P. Haddock, W.T.H. van Oers, North-Holland, Amsterdam, 1972.

[52] H. Ziegelmann, Proc. of the International Conference on Few Body Problems in Nuclear and Particle Physics, Québec, 1974.

[53] The Padé Approximant in Theoretical Physics, herausgegeben von G.A. Baker, Jr., J.L. Gammel, Academic Press, New York, 1970.

[54] E. Harms, Phys. Lett. 41B (1972) 26; Nucl. Phys. A222 (1974) 125.

[55] L. Crepinsek, H. Oberhummer, W. Plessas, H. Zingl, Acta Phys. Austr. 39 (1974) 345.

[56] R.L. Hall, H.R. Post, Proc. Roy. Soc. 90 (1967) 381.

[57] R.R. Lewis, Phys. Rev. 102 (1956) 537.

[58] D.D. Brayshaw, Phys. Rev. 176 (1968) 1855.

[59] T. Sasakawa, Progr. Theoret. Phys., Kyoto, Suppl. 27 (1963) 1.

[60] F. Coester, Phys. Rev. C3 (1971) 525.

[61] T.R. Mongan, Nuovo Cim. 63B (1969) 539.

[62] I.H. Sloan, J. Comp. Phys. 3 (1968) 332.

[63] V.I. Krylov, A.A. Pal'tsev, Tables for Numerical Integration, Israel Program for Scientific Translations, Jerusalem, 1971.

[64] R.A. Minlos, L.D. Faddeev, JETP 41 (1961) 1850.

[65] J.H. Hetherington, L.H. Schick, Phys. Rev. B137 (1965) 935.

[66] Y. Avishai, Phys. Rev. D3 (1971) 3232.

[67] A.W. Thomas, Proc. of the International Conference on Few Body Problems in Nuclear and Particle Physics, Québec, 1974.

[68] V.B. Belyaev, V.N. Efimov, H. Schulz, E.G. Tkachenko, in Few Particle Problems in the Nuclear Interaction, herausgegeben von I. Slaus, S.A. Moszkowski, R.P. Haddock, W.T.H. van Oers, North-Holland, Amsterdam, 1972.

[69] M. Fuda, Phys. Rev. Lett. 32 (1974) 620.

[70] J.A. Tjon, Phys. Rev. D1 (1970) 2109.

[71] T.J. Brady, I.H. Sloan, Phys. Lett. 40B (1972) 55.

[72] H. Kröger, Diplomarbeit, Universität Bonn, 1974.

[73] Y.E. Kim, Phys. Lett. 29B (1969) 411.

[74] P. Doleschall, Phys. Lett. 40B (1972) 443.

[75] F. Sohre, H. Ziegelmann, Phys. Lett. 34B (1971) 579.

[76] N.M. Larson, J.H. Hetherington, Phys. Rev. C9 (1974) 699; N.M. Larson, Dissertation, Michigan State University, 1972.

[77] E. Isaacson, H.B. Keller, Analysis of Numerical Methods, John Wiley, New York, 1966.

[78] F. Sohre, Dissertation, Universität Tübingen, 1972.

[79] K.M. Watson, Phys. Rev. 88 (1952) 1163;
A.B. Migdal, ZhETF 28 (1955) 3.

[80] G.F. Chew, F.E. Low, Phys. Rev. 113 (1959) 1640.

[81] H. Ziegelmann, Jahresbericht an die DFG, 1973.

[82] C. Lovelace, Phys. Rev. B135 (1964) 1225.

[83] E.O. Alt, Habilitationsschrift, Universität Mainz, 1972.

[84] R.A. Malfliet, J.A. Tjon, Nucl. Phys. A127 (1969) 161.

[85] E. Wantuch, Phys. Rev. 84 (1951) 169.

[86] B.E. Bonner, E.B. Paul, G.C. Phillips, Nucl. Phys. A128 (1969) 183.

[87] J.D. Seagrave, Phys. Rev. 97 (1955) 757.

[88] A.C. Berrick, R. Riddle, C.M. York, Phys. Rev. 174 (1968) 1105.

[89] S.M. Bunker, J.M. Cameron, R.F. Carlson, J.R. Richardson, P. Thomas, W.T.H. van Oers, J.W. Verba, Nucl. Phys. A113 (1968) 461.

[90] C.C. Kim, S.M. Bunch, D.W. Devins, H.H. Forster, Nucl. Phys. 58 (1964) 32.

[91] A.R. Johnston, W.R. Gibson, E.A. McClatchie, J.H.P. Megaw, G.T.A. Squier, RHEL R/136 (1966)

[92] B.L.G. Bakker, Z. Phys. A272 (1975) 335.

[93] E.O. Alt, W. Sandhas, Proc. of the International Conference on Few Body Problems in Nuclear und Particle Physics, Québec, 1974.

[94] B.L.G. Bakker, W. Sandhas, Contribution to the Symposium on Theory of Lightest Nuclei, Liblice, 1974.

[95] E.O. Alt, B.L.G. Bakker, Z. Phys. A273 (1975) 37.

[96] W.M. Kloet, J.A. Tjon, Ann. Phys. 79 (1973) 407.

[97] I.H. Sloan, Nucl. Phys. A168 (1971) 211.

[98] J. Arvieux, Nucl. Phys. A221 (1974) 253.

Die vorliegende Schrift wäre höchst unvollständig, wenn sie nicht die Unterstützung erwähnen würde, die ich von vielen Seiten erhalten habe.

In erster Linie sei Prof. Dr. E. Schmid für Anregung und Förderung dieser Arbeit herzlich gedankt.

Mein Dank gilt ferner Prof. Dr. E. O. Alt, Prof. Dr. W. Sandhas und meinen Kollegen, Dr. J. Schwager und Dr. F. Sohre, für viele aufschlußreiche Gespräche und Diskussionen. Prof. Dr. V. B. Belayev danke ich für den Hinweis auf die Zitate [48] und [64].

Ich danke weiterhin der Deutschen Forschungsgemeinschaft für finanzielle Unterstützung und dem Zentrum für Datenverarbeitung der Universität Tübingen für die Bereitstellung der nötigen Rechenzeit.